PRÁCTICAS PARA RESOLVER PROBLEMAS (CON ACTIVIDADES DE NIVELACIÓN)

José Ricardo López Saavedra

IES AS MARIÑAS

2016–2017

MATEMÁTICAS II
TEMA 4. ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE

2016–2017

USO DE CALCULADORAS GRÁFICAS E PROGRAMAS DE COMPUTADOR

Dentro dos estándares de aprendizaxe requeridos para a ESO e o Bacharelato está o uso de medios tecnolóxicos para a realización de cálculos numéricos, alxébricos ou estatísticos, para facer representacións gráficas, recrear ámbitos e obxectos xeométricos, para tratar datos, extraer información, ... e elaborar documentos dixitais coas ferramentas adecuadas como resultado do proceso de procura, análise e selección da información relevante. Entre os contidos contémplase o uso de calculadoras gráficas e programas de computador.

Atendendo ao anterior, no departamento de matemáticas do IES As Mariñas imos usar as calculadoras gráficas da marca Texas Instruments seguintes: TI-89, TI-89 Titanium, Voyage 200 e TI-nspire CAS/ TI-nspire CX CAS polos seguintes motivos:

— Son calculadoras con un sistema alxébrico computacional ou Sistema de Álxebra Computacional SAC (CAS, do inglés Computer Algebra System) e facilitan o cálculo simbólico.

— Teñen un prezo asequible.

— Pesan e consumen pouco, polo que poden transportarse facilmente, e usarse en calquera entorno.

— Son útiles para o ensino universitario, dado que polas súas características poden usarse no estudo de carreiras técnicas: enxeñerías, arquitectura, matemáticas, … como do ámbito das ciencias sociais: económicas, empresariais, …; tamén se poden utilizar para o estudo de FP.

— Dispoñen de emuladores gratuítos, e pode tamén descargarse gratuitamente o sistema operativo (ROM) das calculadoras da páxina web oficial de TI, polo que, de dispoñer de ordenador pode traballarse con estas calculadoras baixo un emulador, tanto no entorno Windows como Android.

— Son programabeis, polo que poden adaptarse ás necesidades particulares de cada alumno.

— Existen miles de programas gratuítos para estas máquinas, que van dende xogos ata aplicacións específicas para enxeñería.

— Existen programas comerciais para estas máquinas, que aumentan a súa potencialidade.

Datos do software para ordenador e para calculadoras utilizado

https://education.ti.com/en/us/downloads-and-activities?active=software

— Dende esta páxina —páxina oficial de Texas Instruments— poden descargarse gratuitamente os sistemas operativos para esas calculadora, programas, aplicacións flash, manuais de usuario das calculadoras, do software, …

https://play.google.com/store/apps/details?id=com.Bisha.TI89EmuDonation

https://play.google.com/store/apps/details?id=com.Bisha.TI89Emu

— Acceso ao emulador de diversas calculadoras para os dispositivos Android. Hai que descargar a ROM dende a páxina: https://education.ti.com/en/us/downloads-and-activities?active=software

http://www.ticalc.org/

— Dende esta páxina poden descargarse miles de programas e utilidades para as calculadoras citadas: emuladores, utilidades para windows, programas de aplicación, xogos, …

http://www.dessci.com/en/products/mathtype/

— Páxina oficial dun editor de ecuacións que corre sobre o Word de Microsoft.

http://www.corel.com/

— Páxina oficial de editores gráficos en formato vectorial, de mapas de puntos e técnicos.

http://www.microsoft.com/es-es

https://www.microsoft.com/es-es/download/details.aspx?id=15702 (Microsoft Mathematics)

http://www.microsoft.com/es-es/download/details.aspx?id=36777 (Complemento Microsoft Mathematics 2013 para Word)

— Páxina oficial onde se pode obter o paquete Office (Word, Excel, …), Windows, Microsoft Mathematics, Vissio, ...

http://www.geogebra.org/

— Páxina oficial de onde se pode descargar gratuitamente o GeoGebra, manuais do e aplicacións. É un un software matemático que posúe funcionalidades que exceden do concepto de procesador xeométrico.

https://www.desmos.com/

— Páxina onde se pode acceder gratuitamente ao programa Desmos que permite, en local ou na web, a realización de gráficas muy e a análise das mesmas.

Recoñecemento de marcas rexistradas: as marcas aquí citadas, comerciais ou non, son marcas dos seus propietarios respectivos, e aquí son citadas co único fin de divulgación docente.

TÁBOA DE CONTIDOS

Capítulo I: Probabilidades. Cálculo de probabilidades ----------5

Capítulo II: Distribucións de probabilidade ---------- 75

Obxectivos	MATEMÁTICAS II. 2º DE BACHARELATO			Competencias clave
	Contidos	Criterios de avaliación	Estándares de aprendizaxe	
	ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE			
l	B5.1. Sucesos. Operacións con sucesos. Asignación de probabilidades a sucesos mediante a regra de Laplace e a partir da súa frecuencia relativa. Axiomática de Kolmogorov. B5.2. Aplicación da combinatoria ao cálculo de probabilidades. B5.3. Experimentos simples e compostos. Probabilidade condicionada. Dependencia e independencia de sucesos. B5.4. Teoremas da probabilidade total e de Bayes. Probabilidades iniciais e finais e verosimilitude dun suceso.	B5.1. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios en experimentos simples e compostos (utilizando a regra de Laplace en combinación con diferentes técnicas de reconto e a axiomática da probabilidade), así como a sucesos aleatorios condicionados (teorema de Bayes), en contextos relacionados co mundo real.	MA2B5.1.1. Calcula a probabilidade de sucesos en experimentos simples e compostos, condicionada ou non, mediante a regra de Laplace, as fórmulas derivadas da axiomática de Kolmogorov e diferentes técnicas de reconto.	CMCCT
			MA2B5.1.2. Calcula probabilidades a partir dos sucesos que constitúen unha partición do espazo mostral.	CMCCT
			MA2B5.1.3. Calcula a probabilidade final dun suceso aplicando a fórmula de Bayes.	CMCCT
g i	B5.5. Variables aleatorias discretas (distribución de probabilidade, media, varianza e desviación típica) e continuas (función de densidade e función de distribución). B5.6. Distribución binomial. Caracterización e identificación do modelo. Cálculo de probabilidades. B5.7. Distribución normal. Tipificación da distribución normal. Asignación de probabilidades nunha distribución normal. B5.8. Cálculo de probabilidades mediante a aproximación da distribución binomial pola normal.	B5.2. Identificar os fenómenos que poden modelizarse mediante as distribucións de probabilidade binomial e normal, calculando os seus parámetros e determinando a probabilidade de diferentes sucesos asociados.	MA2B5.2.1. Identifica fenómenos que poden modelizarse mediante a distribución binomial, obtén os seus parámetros e calcula a súa media e desviación típica.	CMCCT
			MA2B5.2.2. Calcula probabilidades asociadas a unha distribución binomial a partir da súa función de probabilidade, da táboa da distribución ou mediante calculadora, folla de cálculo ou outra ferramenta tecnolóxica.	CMCCT
			MA2B5.2.3. Coñece as características e os parámetros da distribución normal e valora a súa importancia no mundo científico.	CMCCT
			MA2B5.2.4. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que poden modelizarse mediante a distribución normal a partir da táboa da distribución ou mediante calculadora, folla de cálculo ou outra ferramenta tecnolóxica.	CMCCT
			MA2B5.2.5. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que poden modelizarse mediante a distribución binomial a partir da súa aproximación pola normal, valorando se se dan as condicións necesarias para que sexa válida.	CMCCT
b e i l	B5.9. Identificación das fases e tarefas dun estudo estatístico. Análise e descrición de traballos relacionados coa estatística e o azar, interpretando a información e detectando erros e manipulacións.	B5.3. Utilizar o vocabulario axeitado para a descrición de situacións relacionadas co azar e a estatística, analizando un conxunto de datos ou interpretando de forma crítica informacións estatísticas presentes nos medios de comunicación, en especial os relacionados coas ciencias e outros ámbitos, detectando posibles erros e manipulacións tanto na presentación dos datos como na das conclusións.	MA2B5.3.1. Utiliza un vocabulario axeitado para describir situacións relacionadas co azar e elabora análises críticas sobre traballos relacionados coa probabilidade e/ou a estatística aparecidos en medios de comunicación e noutros ámbitos da vida cotiá.	CCL CMCCT

ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE. CAPÍTULO I. PROBABILIDADE

Cálculo de probabilidades **7**
1. Experiencias aleatorias. Sucesos 7
1.1. Espazo mostral 7
1.2. Sucesos/eventos 7
1.3. Experimentos compostos. Espazos compostos 9
2. Lei dos grandes números e idea intuitiva de probabilidade 10
2.1. Lei dos grandes números. Idea intuitiva de probabilidade 10
2.2. Definición clásica de probabilidade 10
2.3. Definición axiomática de probabilidade 11
2.4. Consecuencias dos axiomas 12
2.5. Regra de Laplace 13
3. Análise combinatoria: métodos de conteo 13
3.1. Principio fundamental de conteo. Diagramas de árbore 14
3.2. Factorial dun número 14
3.3. Variacións ordinarias 14
3.4. Permutacións 18
3.5. Combinacións ordinarias 21
4. Cálculo de probabilidades 28
4.1. O problema clásico do cumpreanos 28
4.2. Practicando coa definición clásica de probabilidade 28
4.3. Probabilidades xeométricas 35
4.4. Probabilidade da unión de varios sucesos 39
4.5. Probabilidade condicionada 40
4.6. Sucesos dependentes e independentes 43
4.7. Estudo da probabilidade en táboas de continxencia 44
4.8. Probabilidade composta ou da intersección de dous sucesos 45
4.9. Probabilidade de que apareza, como pouco, un suceso 54

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Algúns experimentos, cando se repiten nas mesmas condicións, producen os mesmos resultados, como pode ser o deixar caer unha pedra dende unha determinada altura: chegará ao chan sempre no mesmo tempo, e coa mesma velocidade.

Outros experimentos non funcionan así: se lanzamos un dado e obtemos un 5, na seguinte tirada do mesmo dado, nas mesmas condicións, non temos absolutamente ningunha seguridade de que saia o mesmo valor.

1. EXPERIENCIAS ALEATORIAS. SUCESOS

- Cando repetindo un experimento nas mesmas condicións obtemos os mesmos resultados, dise que é un *experimento determinista* ou unha *experiencia determinista*.
- Cando o resultado dun experimento depende do azar, dise o que é un *experimento aleatorio* ou unha *experiencia aleatoria*.

No que segue imos centrarnos no estudio dos experimentos aleatorios.

1. Exemplo de experiencias aleatorias aparécennos ao lanzar dados, sacar bolas dunha furna, sacar cartas dunha baralla, xogar á lotería, …

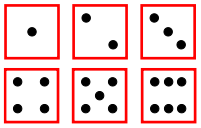
Na vida cotiá aparécennos moitos sucesos aleatorios. Moitos deles, de tipo sociolóxico (viaxes, accidentes, número de persoas que acudirán a un supermercado, …) *son suma de moitas decisións individuais*, e por iso poden ser estudados como sucesos aleatorios.

1.1. Espazo mostral

Chámase *espazo mostral* E dun experimento aleatorio ao conxunto de tódolos resultados posíbeis do experimento.

- Cada un dos elementos dun espazo mostral chámase *punto mostral*.

2. O espazo mostral do experimento de lanzar un dado coas caras numeradas do 1 ao 6 é $E=\{1,2,3,4,5,6\}$.



O espazo mostral de lanzar unha moeda é $E=\{C,+\}$.

1.2. Sucesos/eventos

3. O espazo mostral do experimento de lanzar un dado coas caras numeradas do 1 ao 6 é $E=\{1,2,3,4,5,6\}$. Consideremos agora algúns subconxuntos de *E*.

- A eses subconxuntos chámaselles "*sucesos*".

Saír par: $A=\{2,4,6\}$.

Saír impar: $B=\{1,3,5\}$.

Saír múltiplo de 3: $C=\{3,6\}$.

Chámase *suceso* ou *evento* dun experimento aleatorio a cada un dos subconxuntos do espazo mostral.

- Ao conxunto de tódolos sucesos dun experimento aleatorio chámaselle *espazo de sucesos*, e normalmente desígnase por E ou S.

1.2.1. Distintos tipos de sucesos/eventos

Chámanse *sucesos elementais* ou *eventos elementais* aos sucesos formados por un único punto mostral; é dicir, por un só resultado do experimento aleatorio.

- Son *sucesos compostos* os sucesos formados por dous ou máis puntos mostrais; é dicir, por máis dun resultado do experimento.

Suceso certo ou *suceso seguro* é o que sempre se realiza.

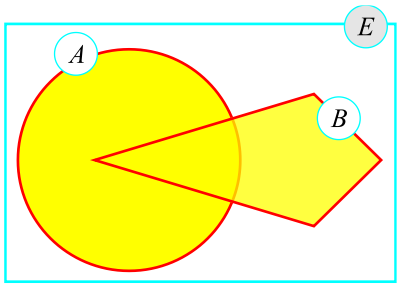
- É evidente que o suceso certo estará formado por tódolos resultados posíbeis do experimento e, polo tanto, coincide co espazo mostral, e por iso represéntase tamén pola letra E.
- *Suceso imposible* é o que non se realiza nunca. Represéntase por $\varnothing$.

- Dado un suceso A do espazo de sucesos E, chámase *suceso contrario* de A ao que se realiza cando non se realiza A, e reciprocamente.
  O suceso contrario de A represéntase por $\bar{A}$ ou por A'.

4. O espazo mostral do experimento de lanzar un dado coas caras numeradas do 1 ao 6 é .
Os sucesos $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$ son sucesos elementais.
Saír par $\{2,4,6\}$ é un suceso composto.

1.2.2. Operacións con sucesos

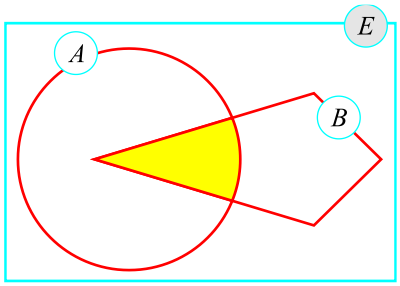
Sexan dous sucesos A e B. Chámanse:



$A \cup B$ e lese "A *unión* B" ao suceso formado por todos os elementos de A e de B.

O suceso $A \cup B$ verifícase cando ocorre un dos $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ dous, A ou B ou ambos.

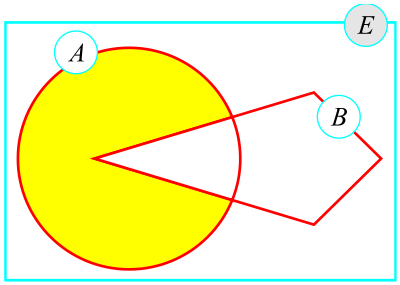
5. Dados os sucesos de $E=\{1,2,3,4,5,6\}$, se $A=\{1,2,5\}$ e $B=\{2,3,5\}$, entón verifícase que $A \cup B=\{1,2,3,5\}$.



$A \cap B$ e lese "A *intersección* B" ao suceso formado por tódolos elementos que son á vez de A e de B.

O suceso $A \cap B$ verifícase cando ocorren simultaneamente A e B.

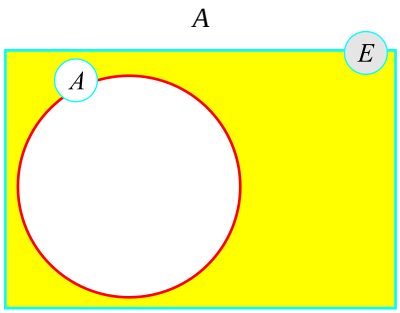
6. Dados os sucesos de $E=\{1,2,3,4,5,6\}$, se $A=\{1,2,5\}$ e $B=\{2,3,5\}$, entón $A \cap B=\{2,5\}$.



$A-B$ e lese "A *menos* B" ao suceso formado por todos os elementos de A que non son de B.

O suceso $A-B$ verifícase cando ocorre A e non ocorre B.

7. Dados os sucesos de $E=\{1,2,3,4,5,6\}$, se $A=\{1,2,5\}$ e $B=\{2,3,5\}$, entón $A-B=\{1\}$.

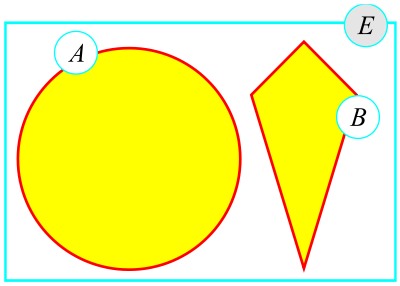


$\bar{A}=E-A$ ou $A'=E-A$, e chámase "*suceso complementario de* A" ou "*suceso contrario de* A".

$\bar{A}$ ou A' verifícase sempre que non se verifica .

- O suceso contrario e o suceso imposible son complementarios: $\bar{E}=\varnothing$ e $\bar{\varnothing}=E$.

8. Dados os sucesos de $E=\{1,2,3,4,5,6\}$, se $A=\{1,2,5\}$, entón $\bar{A}=\{3,4,6\}$.



A e B son *incompatibles* cando non teñen ningún elemento común, é dicir, cando $A \cap B = \varnothing$.

9. Dados os sucesos de $E = \{1,2,3,4,5,6\}$, se $A = \{1,2,5\}$ e $B = \{3,4\}$, entón son incompatibles, verifícase que $A \cap B = \varnothing$.

1.2.3. Propiedades das operacións con sucesos

Dados tres sucesos A, B e C, téñense as propiedades:

Distributivas: ① $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ② $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

De simplificación: ③ $A \cup (B \cap A) = A$ ④ $A \cap (B \cup A) = A$

De complemento: ⑤ $\overline{(\overline{A})} = A$ ⑥ $A - B = A \cap \overline{B}$ ⑦ $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ⑧ $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

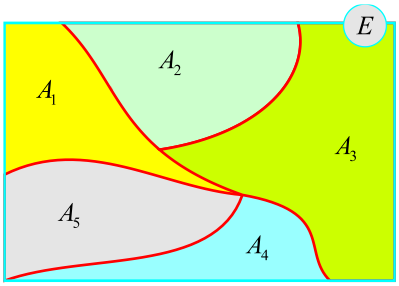
1.3. Experimentos compostos. Espazos compostos

1.3.1. Sistema completo de sucesos

Dise que os sucesos A_1, A_2, A_3, …, A_n constitúen un *sistema completo de sucesos* para un determinado experimento aleatorio se verifican as seguintes condicións:

— $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n = E$.

— A_1, A_2, A_3, …, A_n son incompatibles dous a dous.



10. O espazo mostral do experimento aleatorio consistente en lanzar un dado coas caras numeradas do 1 ao 6 é $E = \{1,2,3,4,5,6\}$. Sexan os sucesos $A = \{1,2,6\}$, $B = \{3,4\}$, $C = \{5\}$.

É fácil comprobar que se cumpren as seguintes propiedades:

— $A \cup B \cup C = E$.

— A, B e C son incompatibles dous a dous.

Polo tanto, estes sucesos constitúen un *sistema completo de sucesos*.

1.3.2. Experimento composto e espazo composto

Un *experimento composto* é o que está formado por varios experimentos simples.

- O espazo mostral obtido dun experimento composto chámase *espazo composto* ou *espazo produto*.

11. Sexa o experimento aleatorio que consiste no lanzamento dun dado e dunha moeda. Na realidade trátase de dúas experiencias simples: o lanzamento do dado e o lanzamento dunha moeda.
O espazo mostral asociado a ese experimento composto é:

	C	$+$
1	$(1,C)$	$(1,+)$
2	$(2,C)$	$(2,+)$
3	$(3,C)$	$(3,+)$
4	$(4,C)$	$(4,+)$
5	$(5,C)$	$(5,+)$
6	$(6,C)$	$(6,+)$

$$E = \{(1,C),(2,C),(3,C),(4,C),(5,C),(6,C),(1,+),(2,+),(3,+),(4,+),(5,+),(6,+)\}.$$

Este espazo mostral obtense formando o *produto cartesiano* dos seguintes conxuntos: $\{1,2,3,4,5,6\}$ e $\{C,+\}$ espazos mostrais do dado e da moeda.

2. LEI DOS GRANDES NÚMEROS E IDEA INTUITIVA DE PROBABILIDADE

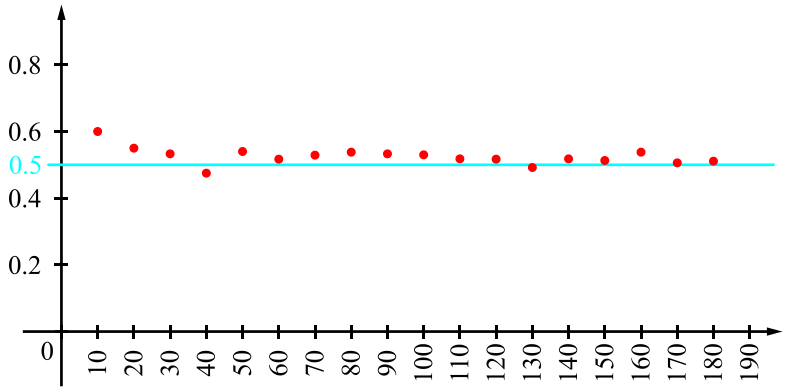
Supoñamos que realizamos n veces un experimento aleatorio.

- A *frecuencia absoluta* dun suceso A, ou simplemente *frecuencia* de A é o número de veces que ocorre A, de desígnase por $f(A)$.
- Chámase *frecuencia relativa* de A á proporción de veces que ocorre A:

$$fr(A) = \frac{f(A)}{n}$$

12. Supoñamos que lanzamos unha moeda 200 veces, e que neste experimento aleatorio, ao anotar o número de veces que sae cara despois de 10, 20, 30, …, 200 lanzamentos se obteñen os datos da táboa seguinte:

Nº lan	Nº de Caras	Frec.
10	6	0.600
20	11	0.550
30	16	0.533
40	19	0.475
50	27	0.540
60	31	0.517
70	37	0.529
80	43	0.538
90	48	0.533
100	53	0.530
110	57	0.518
120	62	0.517
130	64	0.492
140	72	0.514
150	77	0.513
160	86	0.538
170	86	0.506
180	92	0.511
190	95	0.500



Facendo a representación da táboa de frecuencias vese que se van *estabilizando* os resultados arredor do valor 0.5.

- Cando dicimos que se *estabiliza* queremos dicir que a frecuencia do suceso toma valores aproximados, por exceso ou por defecto, a 0.5, de xeito que as flutuacións son cada vez menores segundo aumenta o número de tiradas.

2.1. Lei dos grandes números. Idea intuitiva de probabilidade

Supoñamos que realizamos unha experiencia aleatoria e que observamos reiteradamente a frecuencia relativa dun certo suceso, $fr(A)$, e sexa n o número de experimentos.

A frecuencia relativa dun suceso *tende a estabilizarse arredor dun número*, a medida que o número de probas do experimento crece indefinidamente.

- A ese número ao que se acerca a frecuencia relativa dun suceso canto maior é o número de probas realizadas chámase *probabilidade* do suceso.

$$\lim_{n\to\infty} fr(A) = p(A): \text{ Lei dos grandes números}$$

Esta definición *frecuentista* de probabilidade —que foi enunciada por *J. Bernoulli* mediante a lei dos grandes números— presenta un inconveniente de tipo práctico, xa que para calcular a probabilidade dun suceso sería necesario realizar un gran número de probas co fin de obter experimentalmente o valor ao que se aproximan as frecuencias relativas do suceso en estudo.

Por outra banda, deste xeito sempre obtemos un valor aproximado, en lugar do valor exacto da probabilidade.

2.2. Definición clásica de probabilidade

A primeira definición que se coñece do concepto de probabilidade deuna *Pierre Simon Laplace*:

A *probabilidade* dun suceso A é o cociente entre o número de casos favorábeis e o número de casos posíbeis.

Se indicamos a probabilidade do suceso A por $p(A)$, esta definición pode expresarse:

$$p(A) = \frac{\text{número de casos favorables ao suceso } A}{\text{número de casos posibles}}$$

Á hora de aplicar esa definición hai que ter en conta que *os sucesos elementais teñen que ser igualmente probábeis* (*equiprobábeis*).

- Os *casos posíbeis* son tódolos resultados do experimento, é dicir, tódolos elementos do espazo mostral.
- Os *casos favorábeis* son os elementos que compoñen o suceso A.

A definición clásica de probabilidade recibe tamén o nome de *probabilidade a priori*, dado que para calculala é necesario coñecer, antes de realizar o experimento aleatorio, o correspondente espazo mostral e o número de resultados ou sucesos elementais que entran a formar parte do suceso cuxa probabilidade pretendemos determinar. Pódese calcular a probabilidade de calquera suceso antes de realizar o experimento aleatorio.

A definición clásica de probabilidade pode presentar dificultades cando o espazo mostral é infinito ou cando os posíbeis resultados dun experimento non son igualmente probábeis. Por exemplo, nun proceso de fabricación dun determinado tipo de pezas, poden aparecer algunhas pezas defectuosas, sendo a maioría pezas boas, e neste caso se quixéramos determinar a probabilidade de que unha peza fora defectuosa non poderíamos utilizar a definición clásica de probabilidade, pois necesitaríamos coñecer previamente o resultados do proceso de fabricación (experimento aleatorio). Outro exemplo é o de determinar a probabilidade de que unha persoa morra antes dunha determinada idade, … debendo acudir á definición frecuentista de probabilidade.

13. Faise un experimento aleatorio consistente na extracción dunha carta dunha baralla española de 40 cartas. Atopa as seguintes probabilidades.

13.1. Obter un ouro.

13.2. Obter un as.

13.3. Obter unha figura (xota, cabalo ou rei).

Solución:

O espazo mostral do experimento está formado polos 40 resultados posíbeis correspondentes a cada unha das cartas da baralla. De seguido formamos os sucesos para os que desexamos calcular as probabilidades.

13.1. $O = \text{«obter un ouro»} = \{1,2,3,4,5,6,7,S,C,R\} \rightarrow p(O) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$.

13.2. $A = \text{«obter un as»} = \{1_O, 1_C, 1_B, 1_E\} \rightarrow P(A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$.

13.3. $F = \text{«obter unha figura»} = \{X_O, C_O, R_O, X_C, C_C, R_C, X_B, C_B, R_B, X_E, C_E, R_E\} \rightarrow P(F) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$.

14. Faise o experimento aleatorio consistente en lanzar dous dados e anotar a suma dos puntos das caras superiores. Calcula a probabilidade dos seguintes sucesos:

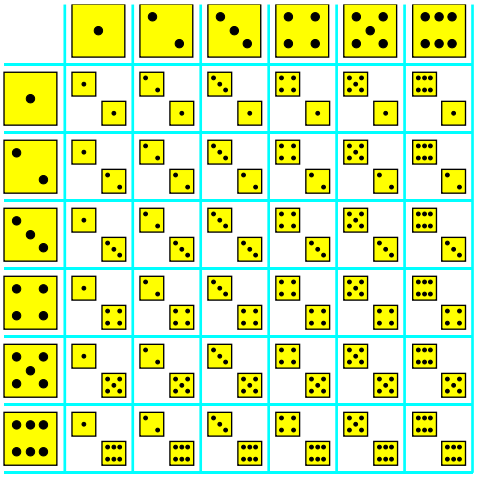
14.1. Obter unha suma igual a 8.

14.2. Obter unha suma menor ou igual a 4.

Solución:

Primeiro construímos o espazo mostra do experimento:

$$\begin{aligned} E = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ &(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\} \end{aligned}$$



Temos 36 casos posíbeis. Construímos a continuación os sucesos que temos que estudar:

14.1. $S_8 = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\} \rightarrow p(S_8) = \frac{5}{36}$.

14.2. $S_{\leq 4} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\} \rightarrow p(S_{\leq 4}) = \frac{6}{36}$.

2.3. Definición axiomática de probabilidade

A idea fundamental da axiomática da probabilidade é considerar a *íntima relación que existe entre o concepto de frecuencia relativa dun suceso e a súa probabilidade*, cando o número de probas é moi grande, como se fai na lei dos grandes números enunciada por *J. Bernoulli*.

Vexamos en primeiro lugar as *propiedades das frecuencias relativas*.

① *A frecuencia relativa dun suceso calquera do espazo de sucesos é sempre positiva ou nula*: $h(A) \geq 0$.

Se realizamos n probas e o suceso A aparece n' veces, é evidente que se verifica que $n' \geq 0$. Dividindo por n os dous membros da desigualdade resulta $\frac{n'}{n} \geq 0 \rightarrow h(A) \geq 0$.

② *A frecuencia relativa do suceso certo é a unidade*: $h(E) = 1$.

Se realizamos n probas, o suceso E aparece n veces, por ser o suceso certo, polo que $h(E) = \frac{n}{n} = 1 \,.\, n'$

③ *A frecuencia relativa da unión de dous sucesos incompatibles á igual á suma das frecuencias relativas de cada un deles*: se A e B son incompatibles, $h(A \cup B) = h(A) + h(B)$.

Se realizamos n probas e o suceso A apareceu veces e o suceso B apareceu n'' veces, entón o suceso $A \cup B$ terá aparecido $n' + n''$ veces, por seren A e B incompatibles, e polo tanto, tense:

$$h(A \cup B) = \frac{n' + n''}{n} = \frac{n'}{n} + \frac{n''}{n} = h(A) + h(B)$$

Inspirado nas anteriores propiedades o matemático *Andrei N. Kolmogorov* (1903–1987) enunciou a seguinte definición axiomática da probabilidade:

Chámase *probabilidade* a unha *lei* (*función* ou *aplicación*) $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que asocia a cada suceso A, do espazo de sucesos, un número real que chamamos *probabilidade de* A e representamos por $p(A)$ e que cumpre os seguintes axiomas:

① A probabilidade dun suceso calquera é positiva ou nula: $p(A) \geq 0$.

② A probabilidade do suceso certo é igual á unidade: .

③ A probabilidade da unión de dous sucesos incompatibles é igual á suma das probabilidades de $p(E) = 1$ cada un deles: se A e B son incompatibles, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

2.4. Consecuencias dos axiomas

2.4.1. Probabilidade do suceso contrario

Como $\bar{A} \cup A = E$, e ademais A e $\bar{A}$ son incompatibles, $1 = p(E) = p(A \cup \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A}) \rightarrow p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

Así tense:

Teorema 1. A probabilidade do suceso $\bar{A}$, contrario do suceso *A*, é igual a 1 menos a probabilidade do suceso *A*. É dicir:

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

Moitas veces é máis fácil calcular a probabilidade do suceso contrario $\bar{A}$ ca do suceso A. Nestes casos, para calcular $p(A)$ é conveniente calcular primeiro $p(\bar{A})$ e a continuación aplicar a fórmula $p(A) = 1 - p(\bar{A})$.

15. Faise un experimento aleatorio consistente na extracción dunha carta dunha baralla española de 40 cartas. Calcula a probabilidade de que non saia unha figura.

Solución:

O espazo mostral do experimento está formado polos 40 resultados posíbeis correspondentes a cada unha das cartas da baralla.

O espazo mostral de sacar unha figura é $F = \{X_O, C_O, R_O, X_C, C_C, R_C, X_B, C_B, R_B, X_E, C_E, R_E\}$.

A probabilidade de obter figura é, consecuentemente, $p(F) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$.

Polo tanto, a probabilidade de non sacar figura é $p(\bar{F}) = 1 - p(F) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$.

2.4.2. Probabilidade do suceso imposible

O suceso imposible é o contrario do suceso certo, e $p(E) = 1$. Polo tanto, pola propiedade anterior, tense o seguinte:

Teorema 2. A probabilidade do suceso imposible é cero: $p(\varnothing) = 0$.

2.4.3. Relación entre a probabilidade de dous sucesos cando un está contido noutro

Teorema 3. Se un suceso A está contido noutro suceso B, entón $p(A)$ é menor ou igual ca $p(B)$: $A \subset B \rightarrow p(A) \leq p(B)$.

En efecto, se $A \subset B \rightarrow \exists C \left| \begin{cases} A \cup C = B \\ A \cap C = \varnothing \end{cases} \right.$, e como A e C son incompatibles, aplicando o axioma 3 de probabilidade na primeira igualdade, resulta:

$p(B) = p(A \cup C) = p(A) + p(C)$, e como (polo 1º axioma) $p(C) \geq 0$, tense que $p(A) \leq p(B)$.

2.4.4. Acotación da probabilidade dun suceso

Do axioma 1 temos que $p(A) \geq 0$. Ademais como $A \subset E \rightarrow p(A) \leq p(E) = 1$. Polo tanto:

Teorema 4. A probabilidade dun suceso calquera é sempre menor ou igual ca unidade: $\forall A \rightarrow 0 \leq p(A) \leq 1$.

2.5. Regra de Laplace

Sexa A_1, A_2, …, A_n un sistema completo de sucesos, que suporemos equiprobábeis. Entón tense que:

$$p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_n) = 1$$

Por seren equiprobábeis, resulta:

$$p(A_1) = p(A_2) = \cdots = p(A_n) = \frac{1}{n}$$

Supoñamos agora que un suceso B se pode obter como unión de h sucesos dos n anteriormente considerados, é dicir:

$$B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_h$$

Tomando as probabilidades nos dous membros da anterior igualdade resulta:

$$p(B) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_h) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{h}{n}$$

Así tense a regra de Laplace:

Teorema 5. ***Regra de Laplace***: Se o espazo mostral dun experimento se pode descompoñer en n posíbeis sucesos *equiprobábeis* e *incompatibles entre si*, e h deles son favorábeis á realización dun suceso B, a probabilidade deste suceso é $\frac{h}{n}$; é dicir, a razón entre o número de casos favorábeis e o número de casos posíbeis; é dicir:

- Se A_1, A_2, …, A_n é un sistema completo de sucesos e $B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_h$ entón

$$p(B) = \frac{h}{n}$$

16. Encargáronse a unha imprenta folletos publicitarios. O impresor informa que de cada mil copias a máquina estropea 12. Obtén a probabilidade de que elixida unha copia ao chou:

16.1. Teña fallos na impresión.

16.2. Estea correctamente impresa.

Solución:

16.1. $p(\text{mal impresa}) = p(M) = \frac{12}{1000} = 0.012$.

16.2. $p(\text{ben impresa}) = p(\bar{M}) = 1 - p(M) = 1 - 0.012 = 0.988$.

3. ANÁLISE COMBINATORIA: MÉTODOS DE CONTEO

En moitos casos o número de puntos mostrais nun espazo mostral non é moi grande, de maneira que non é difícil a enumeración directa ou o conteo de puntos mostrais necesario para obter a probabilidade. Sen embargo, os problemas xorden onde o conteo directo é practicamente imposible. En tales casos é necesario facer uso da *análise combinatoria*, que non é outra cousa que unha maneira sofisticada de contar, e que se estuda en niveis máis elementais.

No que segue vaise facer un breve resumo dos conceptos básicos de combinatoria xa estudados, para refrescar a memoria e así poder aplicar con seguridade os conceptos da análise combinatoria na resolución de problemas de probabilidade.

3.1. Principio fundamental de conteo. Diagramas de árbore

Se algo pode facerse de n_1 maneiras distintas, e despois diso pode facerse unha segunda cousa de n_2 maneiras distintas, … e finalmente se pode facer unha k –ésima en n_k formas distintas, entón todas as k cousas poden levarse a cabo nunha orde específica en

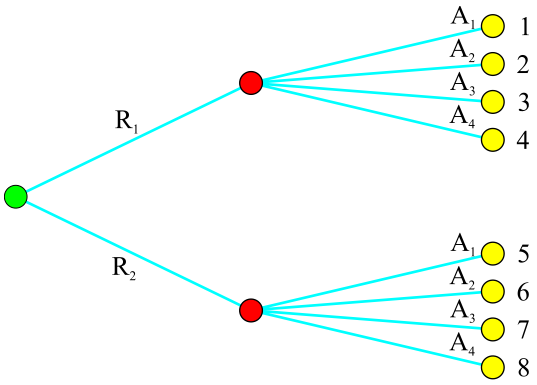
$$n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k$$

formas diferentes.

17. Unha persoa ten 2 reloxos e 4 aneis. Calcula o número de maneiras distintas que de escoller un reloxo e un anel.

Solución:

Na imaxe adxunta vese unha diagrama de árbore que recolle as posíbeis maneiras distintas de escoller un reloxo (R_1, R_2) e un anel (A_1, A_2, A_3, A_4). Polo tanto, ten $2 \cdot 4 = 8$ maneiras distintas de combinar os reloxos cos aneis.



3.2. Factorial dun número

Defínese *factorial* dun número non negativo n, e represéntase por $n!$ como produto de todos os números naturais desde n ata o 1:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

- Por definición $0! = 1$.

18. Calcula $5!$.

Solución:

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Outro xeito de definir o *factorial* dun número é a seguinte:

$$n! = \begin{cases} 0! = 1 \\ n \cdot (n-1)! \text{ se } n > 0 \end{cases}$$

que, evidentemente, é equivalente á anterior.

- Verifícase que $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$

3.3. Variacións ordinarias

Comecemos estudando un caso particular.

Dadas as cinco vogais do alfabeto español $\{a, e, i, o, u\}$, formemos todas as posíbeis ***agrupacións ordenadas*** de dúas vocais distintas. Cantas se poden formar?

Traballando dun xeito ordenado temos as seguintes 20 agrupacións distintas.

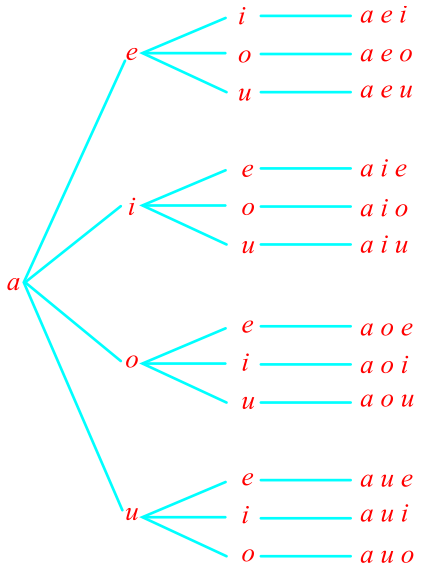
a e	e a	i a	o a	u a
a i	e i	i e	o e	u e
a o	e o	i o	o i	u i
a u	e u	i u	o u	u o

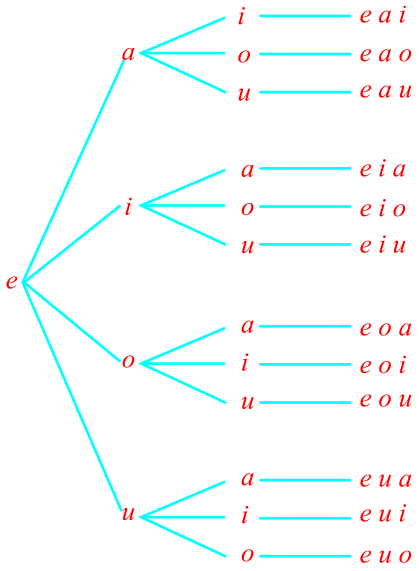
Formamos agora os distintos ***grupos ordenados*** de tres vogais diferentes. Cantos se poden formar?

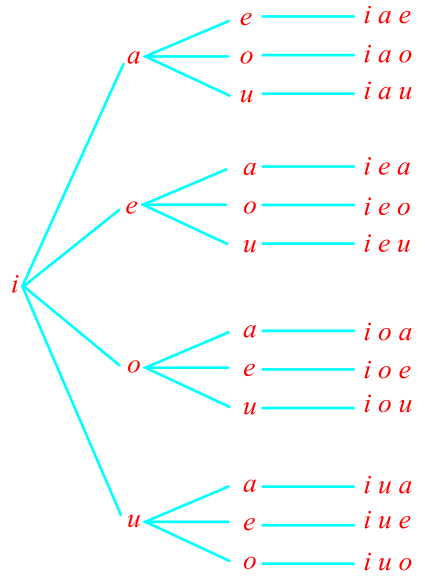
Neste caso o número de grupos é 60. Se intentamos facer agora os grupos de catro vocais o traballo xa sería moi intenso, e é posible que nos esqueceramos dalgún grupo.

a e i	e a i	i a e	o a e	u a e
a e o	e a o	i a o	o a i	u a i
a e u	e a u	i a u	o a u	u a o
a i e	e i a	i e a	o e a	u e a
a i o	e i o	i e o	o e i	u e i
a i u	e i u	i e u	o e u	u e o
a o e	e o a	i o a	o i a	u i a
a o i	e o i	i o e	o i e	u i e
a o u	e o u	i o u	o i u	u i o
a u e	e u a	i u a	o u a	u o a
a u i	e u i	i u e	o u e	u o e
a u o	e u o	i u o	o u i	u o i

Outro xeito de facelo sería empregando os diagramas de árbore, co que *é menos fácil equivocarse* ou esquecerse de algunha.







- O mesmo podemos facer para os demais casos. Con este diagrama "*enseguida*" obtemos os 60 grupos distintos de tres vogais.
- Estes 60 ***grupos ordenados*** que acabamos de formar con cinco deles tomados de 3 en 3 chámanse *variacións de cinco elementos tomados de tres en tres*.
  O seu número represéntase por $V_{5,3}$ ou tamén por V_5^3.

Chámanse ***variacións ordinarias*** ou ***variacións sen repetición*** de m elementos tomados de n en n, $(n \le m)$, e represéntanse por $V_{m,n}$ ou V_m^n, aos distintos grupos que se poden formar cos m elementos, de maneira que:

— En cada grupo entran n elementos.

— Dous grupos *son distintos* se se diferenzan en algún elemento ou no orde de colocación dos elementos.

Inflúe o orde. Dúas variacións son distintas aínda que teñan os mesmos elementos se os teñen colocados en distinto orde.

As variacións de m elementos:

- tomados de un en un chámanse *variacións unitarias*.
- tomados de dous en dous chámanse *variacións binarias*.
- tomados de tres en tres chámanse *variacións ternarias*.
- tomados de catro en catro chámanse *variacións cuaternarias*.
- ……
- tomados de n en n chámanse variacións n–arias.

3.3.1. Número de variacións ordinarias

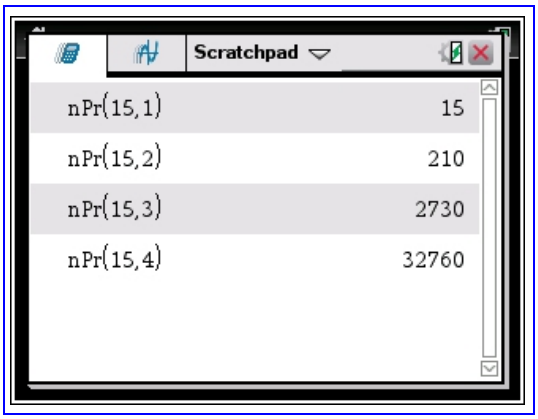
Teorema 6. O número de variacións ordinarias de m elementos tomados de n en n $(n \le m)$ é igual ao produto de n factores naturais consecutivos decrecentes, sendo m o primeiro deles:

$$V_{m,n} = V_m^n = m(m-1)(m-2)(m-3)\cdots(m-n+1),\ m \ge n$$

- Empregando o concepto de factorial, o número de variacións ordinarias de m elementos tomados de n en n $(n \le m)$ é:

$$V_{m,n} = V_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

19. Calcula o número de variacións unitarias, binarias, ternarias e cuaternarias que se poden formar con 15 elementos.



Solución:

$V_{15,1} = V_{15}^{1} = 15$

$V_{15,2} = V_{15}^{2} = 15 \cdot 14 = 210$.

$V_{15,3} = V_{15}^{3} = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$.

$V_{15,4} = V_{15}^{4} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 = 32760$.

Nas calculadoras a función $\mathrm{nPr}(Expr1, Expr2)$ danos o número de variacións de $Expr1$ tomando $Expr2$ cada vez.

Estes argumentos poden ser números enteiros ou expresións simbólicas.

20. Cantas variacións se poden formar con 10 elementos tomados de 5 en 5?

Solución:

$V_{10,5} = V_{10}^{5} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$.

21. De cantas maneiras diferentes se poden cubrir os postos de presidente, secretario e tesoureiro nunha comunidade de veciños de 12 membros?

Solución:

Temos que calcular o número de variacións de 12 elementos tomados de 3 en 3, xa que é diferente ocupar un posto ou outro. É dicir, inflúe o orde.

Pódense cubrir os postos de $V_{12,3} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$ formas distintas.

22. Cantos números de tres cifras significativas se poden formar cos dez díxitos sen que se repita ningún?

Solución:

De todos os números de tres cifras que podemos formar cos dez díxitos ($V_{10,3}$) temos que descontar todos os que empecen por 0, xa que non serían realmente números de tres cifras e ese número é $V_{9,2}$, xa que só podemos tomar nove díxitos para ocupar dous postos. Así o número pedido é:

$V_{10,3} - V_{9,2} = 10 \cdot 9 \cdot 8 - 9 \cdot 8 = 720 - 72 = 648$.

23. Resolve a ecuación $V_{m,4} = 20 \cdot V_{m,2}$.

Solución:

$V_{m,4} = 20 \cdot V_{m,2} \rightarrow m(m-1)(m-2)(m-3) = 20m(m-1) \rightarrow 20 = (m-2)(m-3) \rightarrow 20 = m^2 - 5m + 6 \rightarrow m^2 - 5m - 14 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow m = \begin{cases} -2, \text{ que se descarta} \\ 7 \end{cases} \rightarrow$ a solución é $m = 7$.

Solución: $m = 7$.

3.3.2. Variacións con repetición

Comecemos estudando un caso particular. Dadas as cinco vogais $\{a, e, i, o, u\}$, formemos tódalas posíbeis *agrupacións ordenadas* de dúas vogais.

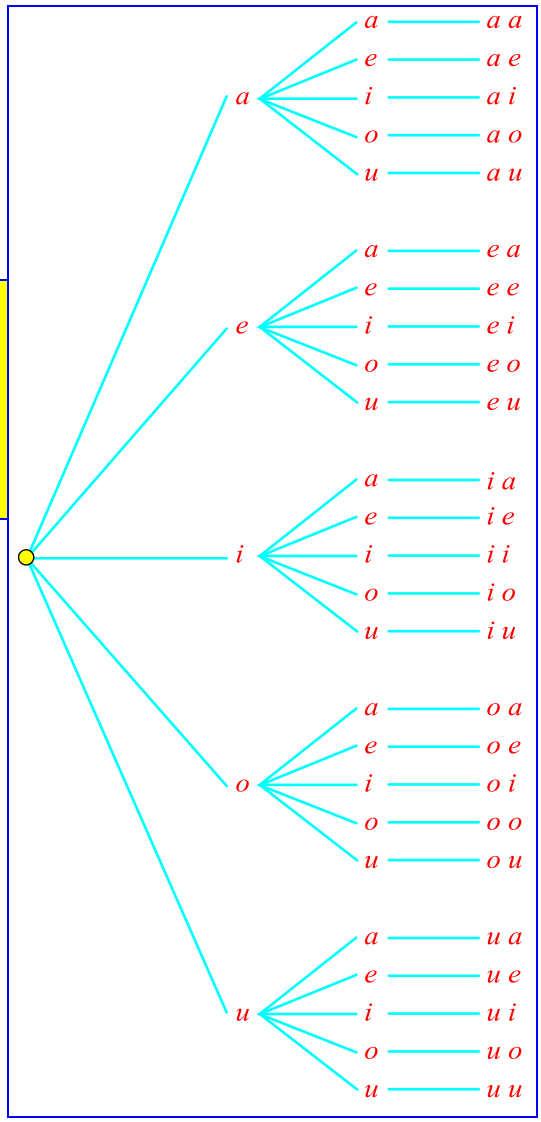
- Aquí non poñemos a condición de distintas que pedíamos antes.
- Cantas se poden formar?

Traballando dun xeito meticuloso tense:

a a	*e a*	*i a*	*o a*	*u a*
a e	*e e*	*i e*	*o e*	*u e*
a i	*a i*	*i i*	*o i*	*u i*
a o	*e o*	*i o*	*o o*	*u o*
a u	*e u*	*i u*	*o u*	*u u*

Temos 25 grupos, calculados nun caso mediante un conteo coidadoso.

Estes 25 grupos tamén se poden obter empregando un diagrama de árbore, como se ve na imaxe adxunta.



- Estes 25 grupos que acabamos de obter reciben o nome de *variacións con repetición de* 5 *elementos tomados de* 2 *en* 2.
- O seu número represéntase por $VR_{5,2}$ ou tamén por VR_5^2.

☹ Tentar facer agora os distintos grupos ordenados de tres vogais, repetidas ou non, é unha tarefa dun enorme traballo.

Chámanse *variacións con repetición de* m *elementos tomados de* n *en* n, e represéntanse por $VR_{m,n}$ ou VR_m^n, aos distintos grupos que se poden formar cos m elementos de xeito que:

— En cada grupo entre n elementos repetidos ou non.

— Dous grupos son distintos se se diferenzan en algún elemento ou no orde de colocación dos elementos.

☠ **Inflúe o orde**. Dúas variacións son distintas aínda que teñan os mesmos elementos se os teñen colocados en distinto orde.

3.3.1. Número de variacións con repetición

Teorema 7. O número de variacións con repetición de m elementos tomados de n en n é igual á potencia de base m e expoñente n:

$$VR_{m,n} = VR_m^n = m^n .$$

24. Calcula o número de variacións con repetición unitarias, binarias, ternarias e cuaternarias que se poden formar con 8 elementos.

Solución:

$VR_{8,1} = VR_8^1 = 8^1 = 8$.

$VR_{8,2} = VR_8^2 = 8^2 = 64$.

$VR_{8,3} = VR_8^3 = 8^3 = 512$.

$VR_{8,4} = VR_8^4 = 8^4 = 4096$.

25. Cantas columnas distintas se poden formar á hora de cubrir unha quiniela de fútbol?

Solución:

Hai que calcular as variacións con repetición de tres elementos —1, X, 2— tomados de 14 en 14:

$VR_{3,14} = VR_3^{14} = 3^{14} = 4782969$.

26. No alfabeto morse empréganse dous símbolos (o punto e a raia). Cantos carácteres diferentes se poden obter no citado alfabeto tomando 1, 2, 3 ou 4 dos símbolos citados?

Solución:

Carácteres tomados cun único símbolo: $VR_2^1 = 2^1 = 2$.

Carácteres tomados con dous símbolos: $VR_2^2 = 2^2 = 4$.

Carácteres tomados con tres símbolos: $VR_2^3 = 2^3 = 8$.

Carácteres tomados con tres símbolos: $VR_2^4 = 2^4 = 16$.

En total téñense $2+4+8+16=30$ carácteres.

27. Cantos números de tres cifras se poden formar cos dez díxitos do sistema decimal, podendo repetirse as cifras?

Solución:

Dados os números de tres cifras que se poden formar (VR_{10}^3) temos que descontar os que empezan por 0, que non serían números de tres cifras; este número é VR_{10}^2, xa que hai 10 díxitos tomados de 2 en 2 para ocupalo lugar das unidades e das decenas. O número pedido é:

$$VR_{10}^3 - VR_{10}^2 = 10^3 - 10^2 = 1000 - 100 = 900 .$$

28. Cantos números capicúas hai de cinco cifras?

Solución:

Un número capicúa de cinco cifras é da forma $N = a\,b\,c\,b\,a$; obtidas as tres primeiras cifras $a\,b\,c$, as outras dúas xa veñen obrigadas de tal xeito que haberá un capicúa para cada ordenación das tres primeiras cifras. Tendo en conta que os díxitos se poden repetir, ese número é VR_{10}^3, pero del temos que descontar os que comezan por cero, VR_{10}^2. Polo tanto, o número pedido é:

$$VR_{10}^3 - VR_{10}^2 = 10^3 - 10^2 = 1000 - 100 = 900 .$$

29. Ao lanzar unha moeda ao ar sete veces, ¿cantos resultados distintos poden obterse?

Solución:

Os resultados de lanzar unha moeda ao ar poden ser cara ou cruz, e inflúe o orde, xa que non é o mesmo obter $\mathrm{C++CCC+}$ que $\mathrm{CCCC+++}$. Entón trátase de variacións con repetición de dous elementos $(\mathrm{C},+)$ tomados de 7 en 7. Así:

$$VR_{2,7} = VR_2^7 = 2^7 = 128 .$$

30. Cantas sinais poden facerse con 4 bandeiras de diferentes cores izando no mástil, cada vez, 2, 3 ou 4 bandeiras?

Solución:

Izando dúas bandeiras: $V_4^2 = 4\cdot 3 = 12$.

Izando tres bandeiras: $V_4^3 = 4\cdot 3\cdot 2 = 24$.

Izando catro bandeiras: $V_4^4 = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$.

$\rightarrow$ O número total de sinais é: $12 + 24 + 24 = 60$.

31. Resolve a ecuación $VR_x^2 + 5VR_{x-2}^2 = 244$.

Solución:

$$VR_x^2 + 5VR_{x-2}^2 = 244 \rightarrow x^2 + 5(x-2)^2 = 244 \rightarrow x^2 + 5x^2 - 20x + 20 = 244 \rightarrow 3x^2 - 10x - 112 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -\dfrac{14}{3}, \text{ que se descarta} \end{cases} \rightarrow \text{a solución é } x = 8 .$$

Solución: $x = 8$.

32. Cantos números diferentes de tres cifras se poden formar cos díxitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

Solución:

$VR_9^3 = 9^3 = 729$.

3.4. Permutacións

Reciben o nome de *permutacións ordinarias* ou *permutacións sen repetición* de m elementos, e represéntanse por P_m, as variacións ordinarias de m elementos tomados de m en m.

Tamén se chaman *permutacións ordinarias* ou *permutacións sen repetición* de m elementos aos distintos grupos que se poden formar de xeito que:

- En cada grupo entran os m elementos.
- Un grupo diferénciase do outro unicamente no orde de colocación dos elementos.

3.4.1. Número de permutacións ordinarias

Teorema 8. $P_m = V_{m,m} = V_m^m = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$.

- Empregando a notación de factorial: $P_m = m!$

33. A primeira división de fútbol española nunha temporada está formada por 22 equipos. De cantas formas se poden clasificar ao final do campionato?

Solución:

As distintas clasificacións veñen dadas polas permutacións dos 22 equipos.

$P_{22} = 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 1124000727777607680000$.

34. Cantas ordenacións diferentes se poden formar coas letras da palabra *PERMUTACION*? Cantas empezan por *P*? Cantas empezan por *PER*?

Solución:

As ordenacións diferentes que se poden formar coas letras da palabra *PERMUTACION* son as permutacións de 11 letras. Polo tanto, o seu número é: $P_{11} = 11! = 39916800$.

Nas ordenacións que empezan por *P*, só permutan 10 letras, pois a primeira é fixa. O seu número é: $P_{10} = 10! = 3628800$.

Nas ordenacións que comezan por *PER* só permutan 8 letras. Polo tanto, o seu número é: $P_8 = 8! = 40320$.

35. Cantos números de cinco cifras se poden formar cos díxitos 1, 2, 3, 4 e 5 sen que se repita ningún deles? Calcula a súa suma.

Solución:

Cos díxitos 1, 2, 3, 4 e 5 pódense formar $P_5 = 5! = 120$ números distintos.

Para calcular a suma hai que ter en conta que a quinta parte dos 120 números acabarán en 1 (é dicir, 24), a quinta parte acabarán en 2, etc.

Entón a suma das unidades é:

$$24\cdot 1 + 24\cdot 2 + 24\cdot 3 + 24\cdot 4 + 24\cdot 5 \;=\; 24(1+2+3+4+5) = 24\cdot 15 = 360.$$

Igualmente, a suma das decenas, centenas, unidades de millar e decenas de millar será 360. Polo tanto a suma pedida é:

$$360 + 360\cdot 10 + 360\cdot 100 + 360\cdot 1000 + 360\cdot 10000 \;=\; 360(1+10+100+1000+10000) \;=\; 360\cdot 11111 = 3999960.$$

36. Resolve a ecuación $P_n = 8P_{n-1}$.

Solución:

$P_n = 8P_{n-1} \rightarrow n! = 8\cdot(n-1)! \rightarrow n(n-1)! = 8(n-1)! \rightarrow n = 8$.

Solución: $n = 8$.

3.4.2. Permutacións circulares

37. De cantas maneiras distintas se poden sentar 8 persoas arredor dunha mesa circular?

Solución:

Temos que decatarnos de que unha vez sentados, se se traslada cada persoa á cadeira da esquerda obtemos unha posición idéntica á anterior.

Para iso fixamos unha persoa e permutamos o resto arredor dela de todas as formas posíbeis.

Número de posicións distintas: $P_7 = 7! = 5040$.

> Estas permutacións reciben o nome de *permutacións circulares* de m elementos, e represéntanse por PC_m. O seu número é
>
> $$PC_m = P_{m-1}$$

3.4.3. Ordenación das permutacións

Se formamos tódalas permutacións posíbeis que podemos facer cos díxitos 1, 2 e 3, temos

123 132 213 231 312 321

De todas estas permutacións, hai unha —a 123— que se considera a *permutación principal*, xa que conserva o "*orde natural*".

Consideremos agora outra permutación calquera, por exemplo a 213.

- Como os elementos 21 inverten o orde con respecto a permutación principal, dise que están en *inversión*.
- Como os elementos 23 conservan o orde da permutación principal, entón dise que están en *permanencia*.
- Como os elementos 13 conservan o orde da permutación principal, entón dise que están en permanencia.
- Polo tanto, a permutación 213 presenta unha inversión —un número impar de inversións— e polo tanto dise que é unha permutación de *orde impar*.

Recibe o nome de *permutación principal* a que conserva o orde natural.

- Dous elementos están en *inversión* cando, prescindindo de tódolos demais, están en orde contrario ao da permutación principal.
- Dous elementos están en *permanencia* cando, prescindindo de tódolos demais, están no mesmo orde que na permutación principal.
- Unha permutación é de *orde impar* cando ten un número impar de inversións. É de *orde par* canto ten un número par de inversións.

3.4.4. Permutacións con repetición

Estudemos o seguinte caso. Desexamos ordenar nunha fila, de tódalas maneiras posíbeis, 3 peóns brancos e 2 peóns negros.

O número **non é** $P_5 = 5! = 120$, xa que os tres peóns brancos non se distinguen entre si e os dous peóns negros tampouco se distinguen entre si, polo que o número de posibilidades redúcese notablemente. O número anterior temos que dividilo polas posíbeis agrupacións indistintas de peóns brancos ($P_3 = 3! = 6$) e de peóns negros ($P_2 = 2! = 2$).

Polo tanto, o número pedido é:

$$\frac{P_5}{P_3 \cdot P_2} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$$

Chámanse *permutacións con repetición* de m elementos onde o primeiro se repite a veces, o segundo repítese b veces, …, e o último repítese k veces, con $a + b + \cdots k = m$ os distintos grupos que se poden formar cos m elementos de tal xeito que:

- En cada grupo de m elementos, o primeiro elemento está a veces
- En cada grupo de m elementos, o segundo elemento está b veces
- ……
- En cada grupo de m elementos, o último elemento está k veces.
- Un grupo diferénzase doutro unicamente polo orde de colocación dos seus elementos.

3.4.5. Número de permutacións con repetición

Teorema 9. O número de permutacións con repetición de m elementos, onde o primeiro se repite a veces, o segundo b veces, …, o último k veces, con $a + b + \cdots + k = m$ represéntase por $P_m^{a,b,\cdots,k}$ e é igual a:

$$P_m^{a,b,\cdots,k} = \frac{P_m}{P_a \cdot P_b \cdot \ldots \cdot P_k} = \frac{m!}{a! \cdot b! \cdot \ldots \cdot k!}$$

38. Coas letras da palabra *CASA*, cantas palabras distintas se poden formar?

Solución:

Temos catro elementos, dos cales o *C* aparece unha vez, o *A* aparece dúas veces e o *S* aparece unha vez. Polo tanto, o número de palabras distintas que se poden formar é:

$$P_4^{1,2,1} = \frac{4!}{1! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{24}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 12$$

39. Nunha furna hai catro bolas brancas e tres bolas negras. Vanse sacando de unha en unha. De cantas maneiras distintas poden facelo?

Solución:

Evidentemente, trátase de permutacións con repetición de 7 elementos, dos cales un repítese 4 veces e outro 3 veces. Polo tanto, o número de formas distintas de sacalas é:

$$P_7^{4,3} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$$

40. Nunha hucha hai 3 moedas de 10 céntimos, 3 de euro, 4 moedas de 20 céntimos e 2 moedas de 2 euros. De cantas maneiras distintas se poden sacar da hucha, moeda a moeda?

Solución:

Evidentemente, trátase de permutacións con repetición de 12 elementos, dos cales un repítese 3 veces, outro 3 veces, outro 4 veces e o último 2 veces. O número pedido é:

$$P_{12}^{3,3,4,2} = \frac{12!}{3! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 2!} = 277200$$

41. Cantas quinielas é necesario facer para acertar con toda seguridade un pleno, no que hai seis empates e dúas derrotas na casa?

Solución:

$$P_{14}^{6,2,6} = \frac{14!}{6!2!6!} = 84\,084 .$$

42. De cantas maneiras se poden permutar as letras da palabra MATEMÁTICAS?

Solución:

$$P_{11}^{3,2,2,1,1,1,1} = \frac{11!}{3!2!2!1!1!1!1!} = 1663200 .$$

43. Cantos números de tres cifras existen no sistema decimal que non repiten ningunha cifra? Non se deben ter en conta aqueles nos que a primeira cifra da esquerda é cero.

Solución:

$V_{10}^{3} - V_{9}^{2} = 10 \cdot 9 \cdot 8 - 9 \cdot 8 = 648$ (descontamos os que empezan por 0)

44. As rúas dunha cidade forman unha cuadrícula. Desígnanse por 1,2,3, … as que van de Norte a Sur e por A, B, C, … as que van de Oeste a Este. Cantos camiños distintos de lonxitude mínima se poden seguir para ir do cruce das rúas $A-1$ ao cruce $D-7$?

Solución:

Para pasar do cruce $A-1$ ao cruce $D-7$ hai que percorrer:

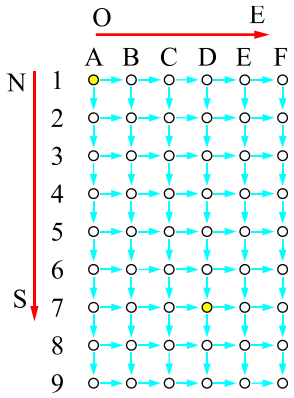
- Tres mazás de Oeste a Este.
- Seis mazás de Norte a Sur.

O número total de camiños é, polo tanto, 9.

Se formamos as permutacións con repetición de $6+3=9$ elementos, dos cales supoñemos 6 iguais entre si e 3 iguais entre si, entón cada permutación indícanos un camiño a seguir entre A–1 e D–7. Un camiño é $\rightarrow \rightarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \rightarrow \downarrow \downarrow$, por exemplo, ou

$\rightarrow \rightarrow \rightarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$

O número total de camiños é $P_{9}^{6,3} = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = 84$.



3.5. Combinacións ordinarias

Estudemos o seguinte caso. Cos números 1, 2, 3, 4 e 5, cantos produtos distintos se poden formar con tres factores?

Pola propiedade conmutativa da multiplicación,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot 3 \cdot 2 = 2 \cdot 1 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 3 \cdot 1 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 1, \text{ etc.}$$

polo que os produtos diferentes que se poden formar son as que se ven á dereita. Contamos 10 casos posíbeis, que chamamos *combinacións* de 5 elementos tomados de 3 en 3.

Representámolo $C_{5,3}$ ou C_{5}^{3}.

$1 \cdot 2 \cdot 3$ $2 \cdot 3 \cdot 4$ $3 \cdot 4 \cdot 5$
$1 \cdot 2 \cdot 3$ $2 \cdot 3 \cdot 5$
$1 \cdot 2 \cdot 5$ $2 \cdot 4 \cdot 5$
$1 \cdot 3 \cdot 4$
$1 \cdot 3 \cdot 5$
$1 \cdot 4 \cdot 5$

Chámanse *combinacións ordinarias* ou *combinacións sen repetición* de m elementos tomados de n en n ($n \leq m$), e represéntanse por $C_{m.n}$ ou C_{m}^{n}, aos distintos grupos que se poden formar cos m elementos, de xeito que se verifique:

- En cada grupo entran n elementos distintos
- Dous grupos son distintos se se diferenzan en algún elemento, pero non no orde de colocación.

Non influe o orde. Dúas combinacións son distintas só canto teñen distintos elementos, non importando para nada o orde de colocación.

As combinacións de m elementos

- tomados de un en un chámanse *combinacións unitarias.*
- tomados de dous en dous chámanse *combinacións binarias.*
- tomados de tres en tres chámanse *combinacións ternarias.*
- tomados de catro en catro chámanse *combinacións cuaternarias.*
- ……
- tomados de n en n chámanse *combinacións n –arias.*

3.5.1. Número de combinacións ordinarias

Teorema 10. O número de combinacións ordinarias de m elementos tomados de n en n represéntase por $C_{m.n}$ ou por C_m^n, e é:

$$C_{m,n} = C_m^n = \frac{V_m^n}{P_n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

45. Calcula o número de combinacións unitarias, binarias, ternarias e cuaternarias que se poden formar con 9 elementos.

Solución:

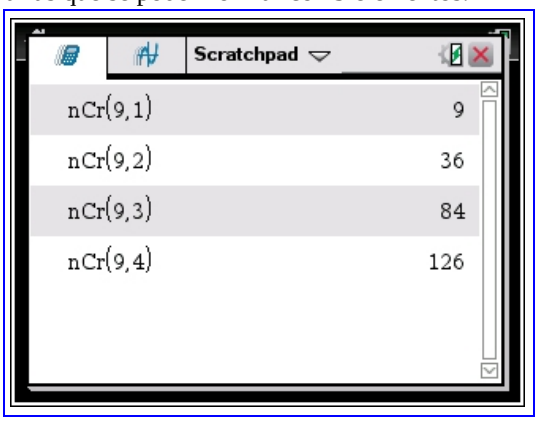
$C_9^1 = \frac{V_9^1}{P_1} = \frac{9!}{1!8!} = 9$.

$C_9^2 = \frac{V_9^2}{P_2} = \frac{9!}{2!7!} = 36$.

$C_9^3 = \frac{V_9^3}{P_3} = \frac{9!}{3!6!} = 84$.

$C_9^4 = \frac{V_9^4}{P_4} = \frac{9!}{4!5!} = 126$

Coas calculadoras que TI que usamos, a función $\text{nCr}(Expr1, Expr2)$ devolve o número de combinacións de $Expr1$ tomando $Expr2$ cada vez. Estes argumentos poden ser expresións enteiras ou simbólicas.



46. Para cubrir 3 postos de administrativo preséntanse 12 persoas. De cantas formas distintas se poden elixir?

Solución:

Non inflúe o orde, xa que o que interesa é ser elixido para o posto de traballo e non no orde en que se é elixido. Polo tanto hai que calcular as combinacións de 12 elementos tomados de 3 en 3. O número pedido é:

$$C_{12}^3 = \frac{V_{12}^3}{P_3} = \frac{12!}{3!9!} = 220$$

47. Cantos triángulos distintos se poden formar con 8 puntos no plano, se tres deles nunca están en liña recta?

Solución:

Para que dous triángulos sexan distintos teñen que ter como mínimo distinto un vértice. Polo tanto, o orde no que se tomen os vértices non inflúe, e así temos que achar o número de combinacións de 8 elementos tomados de 3 en 3, resultando que o número de triángulos posíbeis é:

$$C_8^3 = \frac{V_8^3}{P_3} = \frac{8!}{3!5!} = 56$$

Solución: poden formarse 56 triángulos.

48. Resolve a ecuación $3C_x^3 - 5C_x^2 = 8C_x^1$.

Solución:

$$3C_x^3 - 5C_x^2 = 8C_x^1 \to 3\frac{x!}{3!(x-3)!} - 5\frac{x!}{2!(x-2)!} = 8\frac{x!}{1!(x-1)!} \to 3\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)!}{6(x-3)!} - 5\frac{x(x-1)(x-2)!}{2(x-2)!} = 8\frac{x(x-1)!}{1(x-1)!} \to$$

$$\to \frac{x(x-1)(x-2)}{2} - \frac{5x(x-1)}{2} = 8x \to x(x-1)(x-2) - 5x(x-1) = 16x \to (x-1)(x-2) - 5(x-1) = 16 \to x^2 - 8x + 7 = 16 \to$$

$$\to x^2 - 8x - 9 = 0 \to \begin{cases} x = -1, \text{ que se descarta} \\ x = 9 \end{cases} \to x = 9.$$

Solución: $x = 9$.

49. A diferenza entre o número de variacións binarias de m obxectos e o de combinacións binarias dos mesmos m obxectos é 136. Obtén o número de obxectos.

Solución:

$$V_m^2 - C_m^2 = 136 \rightarrow \frac{m!}{(m-2)!} - \frac{m!}{2!(m-2)!} = 136 \rightarrow m(m-1) - \frac{m(m-1)}{2} = 136 \rightarrow 2m(m-1) - m(m-1) = 272 \rightarrow$$

$$\rightarrow m^2 - m - 272 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = -16, \text{ que se descarta} \\ m = 17 \end{cases} \rightarrow m = 17 .$$

Solución: hai $m = 17$ obxectos.

3.5.2. Números combinatorios

Chámase *número combinatorio* ao número de combinacións de m elementos tomados de n en n.

- Represéntase por $\binom{m}{n}$ e lese "m *sobre* n"

$$\binom{m}{n} = C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n!)}$$

3.5.3. Propiedades inmediatas dos números combinatorios

Teorema 11. Da definición de número combinatorio dedúcense as seguintes propiedades:

- $\binom{m}{0} = 1$.
- $\binom{m}{1} = m$.
- $\binom{m}{m} = 1$.
- $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$.
- $\binom{m}{n-1} + \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n}$.

50. Nunha certa provincia existen 10 pobos que están incomunicados entre si. Cantos trazados hai que realizar para que dous pobos estean sempre comunicados entre si?

Solución:

$$C_{10}^2 = \binom{10}{2} = 45 .$$

51. Nunha reunión hai 17 persoas. Cantos saúdos se intercambiarán?

Solución:

$$C_{17}^2 = \binom{17}{2} = 136 .$$

52. Cantas xogadas diferentes se poden obter se se sacan oito cartas dunha baralla de 40 cartas?

Solución:

$$C_{40}^8 = \binom{40}{8} = 76904685 .$$

53. Obtén o valor de x na igualdade $\binom{725}{349} = \binom{725}{x}$.

Solución:

$x = 349$ ou $x = 725 - 349 = 376$.

Solucións: $x = 39$ e $x = 376$.

54. En cantos puntos se cortan 8 rectas se tres delas son paralelas entre si?

Solución:

$$C_8^2 - C_3^2 = 28 - 3 = 25 .$$

3.5.4. Triángulo de Tartaglia

Empregando a propiedade $\binom{m}{n-1}+\binom{m}{n}=\binom{m+1}{n}$ dos números combinatorios podemos calcular de maneira rápida e sinxela tódolos números combinatorios do seguinte xeito:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}$$

Cada número combinatorio é suma dos dous números que están inmediatamente sobre el. Deste xeito obtense a seguinte táboa, coñecida como *triángulo de Tartaglia*.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}$$

3.5.5. Combinacións con repetición

Chámanse *combinacións con repetición* de m elementos tomados de n en n, e represéntanse por $CR_{m,n}$ ou CR_m^n aos distintos grupos que podemos formar con m elementos, de xeito que:

- En cada grupo entre n elementos, repetidos ou non.
- Dous grupos son distintos se se diferenzan en algún elemento.

Non influe o orde. Dúas combinacións son distintas só canto teñen distintos elementos, non importando para nada o orde de colocación.

3.5.6. Número de combinacións con repetición

Teorema 12. O número de combinación con repetición é:

$$CR_m^n = C_{m+n-1}^n = \binom{m+n-1}{n}$$

55. Calcula o número de combinacións con repetición unitarias, binarias, ternarias e cuaternarias que se poden facer con 7 elementos.

Solución:

$$CR_7^1 = C_{7+1-1}^1 = \binom{7+1-1}{1} = \frac{7!}{1!6!} = 7 .$$

$$CR_7^2 = C_{7+2-1}^2 = \binom{7+2-1}{2} = \frac{8!}{2!6!} = 28 .$$

$$CR_7^3 = C_{7+3-1}^3 = \binom{7+3-1}{3} = \frac{9!}{3!6!} = 84$$

$$CR_7^4 = C_{7+4-1}^4 = \binom{7+4-1}{4} = \frac{10!}{4!6!} = 210 .$$

56. Cantas rectas se poden formar con 20 puntos situados de tal forma que non hai tres puntos alineados?

Solución:

$C_{20,2} = C_{20}^{2} = \binom{20}{2} = 190$.

57. Coas letras da palabra *FÚTBOL:*

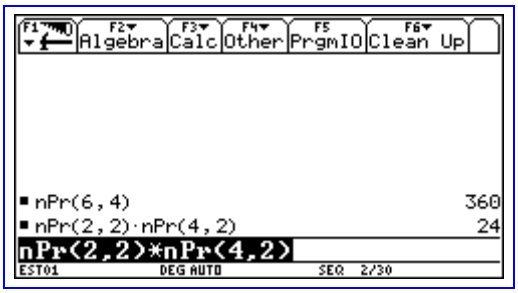
57.1. Cantas palabras de 4 letras se poden formar?

57.2. Cantas empezan por vogal e acaban por vogal?

Solución:

57.1. $V_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

57.2. $V_2^2 \cdot V_4^2 = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$.



58. Cantos números de tres cifras se poden formar coas cifras pares 2, 4, 6 e 8 sen que se repita ningunha que sexan maiores que 500?

Solución:

Os que empecen por 6 ou por 8: $V_{2,2} \cdot V_{3,2} = (2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2) = 12$.

59. Coas cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, cantas ordenacións distintas se poden formar de maneira que as cifras impares ocupen os lugares impares?

Solución:

Ordenación das cifras impares: $P_4 = 4! = 24$.

Ordenación das cifras pares: $P_3 = 3! = 6$.

Ordenacións distintas que se poden formar: $24 \cdot 6 = 144$.

60. Coas cifras 6, 7, 8 e 9:

60.1. Cantos números de 6 cifras se poden formar?

60.2. Cantos acaban en 6?

60.3. Cantos son múltiplos de 2?

Solución:

60.1. $VR_4^6 = 4^6 = 4096$.

60.2. $\frac{VR_4^6}{4} = \frac{4096}{4} = 1024$.

60.3. Para que sexan múltiplos de 2 teñen que acabar en 6 ou en 8, polo que son: $\frac{VR_4^6}{2} = \frac{4096}{2} = 2048$.

61. De cantas formas distintas poden sentarse tres rapaces e dúas rapazas na fila de butacas dun cine, tendo en conta que non poden estar dous rapaces xuntos nin dúas rapazas xuntas?

Solución:

Os rapaces deben estar sentados nos extremos e no centro: $\mathrm{H\,M\,H\,M\,H}$.

Os rapaces pódense ordenar de $P_3 = 3! = 6$ formas distintas.

As rapazas pódense ordenar de $P_2 = 2! = 2$ formas distintas $\rightarrow$ en total existen $6 \cdot 2 = 12$ ordenacións distintas.

62. Permutando de todos os modos posíbeis as cifras do numero $1\,1\,1\,2\,2\,3$, cantos números resultan?

Solución:

$P_6^{3,2,1} = \frac{6!}{3!2!1!} = 60$.

63. Unha bolsa contén 12 bolas de igual tamaño e delas, 5 son negras, 4 brancas e 3 vermellas. De cantos modos se pode sacar un grupo de 6 bolas que conteña, ao menos, unha de cada cor?

Solución:

O número total de conxuntos con 6 bolas son: $C_{12,6} = C_{12}^{6} = \binom{12}{6} = 924$;

Un conxunto contén só dúas cores nos seguintes casos:

5N e 4B $\rightarrow C_9^6 = \binom{9}{6} = 84$;

4B e 3R $\rightarrow C_7^6 = \binom{7}{6} = 7$;

5N e 3R $\rightarrow C_8^6 = \binom{8}{6} = 28$.

Entón $C_9^6 + C_7^6 + C_8^6 = 119$ $\rightarrow$ o número de conxuntos con tres cores é $924 - 119 = 805$.

64. Nunha unidade militar hai 6 capitáns, 10 tenentes, 25 sarxentos e 50 cabos. De cantas maneiras se poden seleccionar un grupo de 3 capitáns, 7 tenentes, 15 sarxentos e 36 cabos?

Solución:

$C_6^3 \cdot C_{10}^7 \cdot C_{25}^{15} \cdot C_{50}^{36} = 20 \cdot 120 \cdot 3268760 \cdot 937845656300 = 735742168196925120000 0$.

65. Con un grupo de 12 alumnos de bacharelato deben formarse tres equipos de 4 persoas cada un para que asistan a tres exposicións distintas. Cantas clasificacións diferentes poden facerse?

Solución:

O primeiro grupo pode escollerse de C_{12}^4 maneiras distintas; o segundo grupo pode facerse de C_8^4 maneiras distintas (só quedan sen asignar 8 alumnos), e o terceiro grupo pode formarse de C_4^4 maneiras distintas.

Polo tanto, todos os grupos poden formarse de

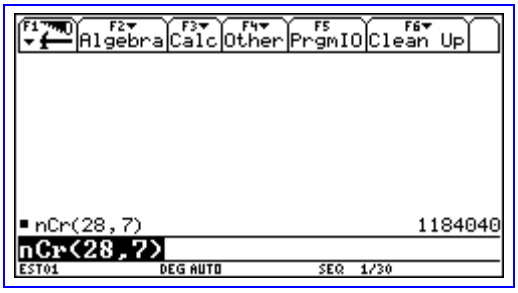
$$C_{12}^4 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4 = 495 \cdot 70 \cdot 1 = 34650$$

maneiras distintas.

66. No xogo do dominó 7 fichas fan un «*xogo*». Sabendo que hai 28 fichas, cantos «*xogos*» diferentes poden facerse con elas?

Solución:

$$C_{28}^7 = \frac{28!}{7!(28-7)!} = 1184040.$$



67. Un xogador habitual de quinielas ten a corazonada de que na próxima xornada futbolística gañarán 9 equipos na casa, empatarán 3 e gañarán en campo contrario 2.
Cantas quinielas deberá encher para asegurarse un pleno de 14?

Solución:

Son permutacións de 14 elementos, entre os cales o elemento **1** se repite 9 veces, o elemento **X** aparece 3 veces e o elemento **2** aparece 2 veces.

Polo tanto o número pedido será:

$$P_{14}^{9,3,2} = \frac{14!}{9!3!2!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9!3!2!} = 20020 \text{ quinielas.}$$

68. Nun taller traballan 6 homes e 4 mulleres. Segundo o número de fichas elíxense ao chou 7 persoas. Determina o número de casos en que aparecen 3 mulleres.

Solución:

Se van 3 mulleres, irán 4 homes.

Por cada grupo de 3 mulleres hai C_6^4 homes; como hai C_4^3 grupos de 3 mulleres, o número de casos será:

$$C_6^4 \cdot C_4^3 = \binom{6}{4} \cdot \binom{4}{3} = 15 \cdot 4 = 60 .$$

69. De cantos modos distintos se poden colocar 6 libros nun estante?

Solución:

$P_6 = 6! = 720$.

70. Cos guarismos dos números 47251 e 6839 ¿cantos números de seis cifras podemos formar de maneira que cada un teña tres cifras distintas do primeiro e tres cifras distintas do segundo?

Solución:

$V_5^3 \cdot V_4^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1440$.

71. Unha bolsa contén 12 bolas de distinto tamaño e delas, 5 son negras, 4 brancas e 3 vermellas. De cantos modos se pode sacar un grupo de 6 bolas que conteña, ao menos, unha de cada cor?

Solución:

O número total de conxuntos con 6 bolas son: $C_{12}^6 = \binom{12}{6} = 924$;

Un conxunto contén só dúas cores nos seguintes casos:

5N e 4B $\rightarrow$ $C_9^6 = \binom{9}{6} = 84$;

4B e 3R $\rightarrow$ $C_7^6 = \binom{7}{6} = 7$;

5N e 3R $\rightarrow$ $C_8^6 = \binom{8}{6} = 28$.

Entón $C_9^6 + C_7^6 + C_8^6 = 119$ $\rightarrow$ o número de conxuntos con tres cores é $924 - 119 = 805$.

72. Téñense 20 bolas diferentes e dúas furnas. De cantas maneiras se poden colocar 12 bolas nunha delas e 8 na outra?

Solución:

$C_{20}^8 = \binom{20}{8} = 125970$.

73. Nunha reunión de 30 persoas decídese formar comisións con 6 persoas para estudar un certo plan. Cantas comisións diferentes se poden formar?

Solución:

$C_{30}^6 = \binom{30}{6} = 593775$.

4. CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Despois do inciso para repasar os métodos de conteo, seguimos coas probabilidades.

4.1. O problema clásico do cumpreanos

O problema clásico do cumpreanos relaciónase coa probabilidade de que n persoas cumpran anos en datas distintas, onde $n \leq 365$. Non se teñen en conta os anos bisestos e suponse que o cumpreanos dunha persoa pode caer en calquera día con igual probabilidade.

Dado que hai n persoas e 365 días diferentes, hai 365^n formas distintas nas que as n persoas poden cumprir anos. Por outra banda, se as n persoas teñen datas de nacemento distintas, entón:

① A primeira persoa pode ter nacido en calquera dos 365 días.

② A segunda persoa pode ter nacido nos 364 días restantes.

③ A terceira persoa pode ter nacido nos 363 días restantes, e así sucesivamente.

Polo tanto hai $365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365-n+1)$ formas nas que n persoas poden cumprir anos en datas distintas. Por conseguinte:

$$p(n \text{ persoas cumpran anos en datas distintas}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \cdots \cdot (365-n+1)}{365^n}$$

En consecuencia, a probabilidade p de que dúas ou máis persoas teñan a mesma data de cumpreanos é a seguinte:

$$p = 1 - (\text{probabilidade de que no haxa dúas persoas que cumpran anos o mesmo día}) =$$
$$= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \cdots \cdot (365-n+1)}{365^n}.$$

Os valores de p dependendo de n, cando n é un múltiplo de 10, dende 10 ata 60 vese na táboa seguinte:

n	10	20	30	40	50	60
p	0.117	0.411	0.706	0.891	0.970	0.994

Obsérvase que para $n = 22$ resulta $p = 0.476$ e para $n = 23$ é $p = 0.507$. En consecuencia:

> Nun grupo de 23 persoas é máis probable que polo menos dúas delas cumpran anos o mesmo día que todos cumpran anos en datas distintas

A táboa anterior tamén indica que, nun grupo de 60 persoas ou máis, a probabilidade de que dúas ou máis delas cumpran anos o mesmo día excede do 99%.

4.2. Practicando coa definición clásica de probabilidade

74. Calcula a probabilidade de que ao lanzar tres moedas se obteña, ao menos, unha cara.

Solución:

Neste caso é máis fácil calcular a probabilidade do suceso contrario.

Sexa $A =$ «obter ao menos unha cara». Temos entón que $\bar{A} =$ «non obter ningunha cara» = «obter tres cruces».

$p(\bar{A}) = \frac{1}{8}$; en consecuencia, $p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

75. Determina a probabilidade de que ao lanzar un dado equilibrado apareza un número par.

Solución:

O evento pode ocorrer de tres maneiras (un 2, 4 ou 6) de seis casos igualmente probables; así tense que

$p(\text{número par}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

76. Determina a probabilidade de que ao lanzar ao ar tres moedas equilibradas apareza, ao menos, unha cruz.

Solución:

Supoñendo que se distinguen as moedas, hai 8 casos:

$$CCC, CC+, C+C, +CC, C++, +C+, ++C, +++$$

Unicamente o caso CCC é desfavorable, polo que $p(\text{ao menos unha cruz}) = \frac{7}{8}$.

77. Determina a probabilidade de que ao sacar ao chou unha bola dunha caixa que contén 4 bolas brancas, 3 negras e 5 azuis, apareza unha bola branca.

Solución:

Hai $4+3+5=12$ bolas, das cales só 4 son brancas $\rightarrow$ $p(\text{branca})=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

78. Sácase ao chou unha carta dun xogo ordinario de póquer de 52 cartas. Calcula a probabilidade de que a carta sexa:

78.1. Un rei.

78.2. Unha carta de figura (xota, raíña ou rei).

78.3. Carta vermella (corazón ou diamante).

78.4. Unha carta de figura vermella.

Solución:

78.1. Hai 4 reis, polo que $p(\text{rei})=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$.

78.2. Hai $4\cdot 3=12$ figuras $\rightarrow$ $p(\text{figura})=\frac{12}{52}=\frac{3}{13}$.

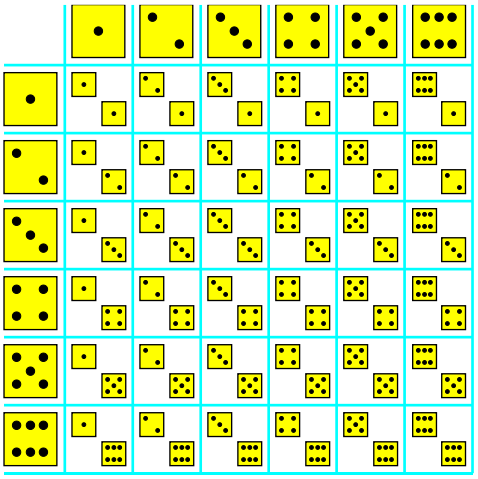
78.3. Hai 13 corazóns e 13 diamantes $\rightarrow$ $p(\text{vermello})=\frac{26}{52}=\frac{1}{2}$.

78.4. Hai 6 cartas de figura que son vermellas $\rightarrow$ $p(\text{figura vermella})=\frac{6}{52}=\frac{3}{26}$.

79. Lánzanse dous dados. Calcula a probabilidade de que a suma dos puntos aparecidos nas caras sexa par e ademais, polo menos, na cara dun dos dados apareza o seis.

Solución:

Ao tirar dous dados o espazo mostral é o que se ve na figura adxunta, co que o número de o número total de resultados elementais posibles dos experimentos ou probas é $6\cdot 6=36$. Miramos os resultados favorables ao suceso pedido:



$$(6,2)\rightarrow 6+2=8$$
$$(6,4)\rightarrow 6+4=10$$
$$(6,6)\rightarrow 6+6=12$$
$$(2,6)\rightarrow 2+6=8$$
$$(4,6)\rightarrow 4+6=10$$

Vese que hai 5 casos favorables, polo que a probabilidade pedida é $p=\frac{5}{36}$.

80. Nun caixón hai 2 calcetíns brancos e 2 calcetíns negros. Sácanse dous ao chou. Atopa a probabilidade de que sexan parella (da mesma cor).

Solución:

Hai $C_4^2=\binom{4}{2}=6$ formas de sacar 2 calcetíns, e só dous pares resultarían parella $\rightarrow$ a probabilidade é $p(\text{parella})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

81. Ao transportar unha caixa contendo 21 pezas estándar e 10 non estándar perdeuse unha peza, e non se sabe cal. A peza extraída ao chou (despois do transporte) resultou estándar. Calcula a probabilidade de fora extraviada:

81.1. Unha peza estándar.

81.2. Unha peza non estándar.

Solución:

81.1. A peza estándar escollida, evidentemente, non pode ser a perdida.

Pode terse extraviado calquera das 30 pezas restantes $(21+10-1=30)$, e entre elas había 20 pezas estándar $(21-1=20)$.

Polo tanto, a probabilidade de que fora extraviada unha peza estándar é igual a:

$$p(\text{extraviar unha peza estándar})=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$$

81.2. Entre as 30 pezas, cada unha das cales podía ter sido extraviada, había 10 non estándar. Polo tanto, a probabilidade de ter perdido unha peza non estándar é:

$$p(\text{extraviar unha peza non estándar})=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$$

82. Pensouse un número de dúas cifras diferentes. Calcula a probabilidade de que resulte igual ao número pensado:

82.1. O número obtívose mediante a escritura de dous díxitos obtidos ao chou.

82.2. O número obtívose aleatoriamente de entre todos os números de dúas cifras distintas.

Solución:

82.1. Cos 10 díxitos podemos formar aleatoriamente 90 números binarios de cifras distintas: empezando por 1 podemos formar $1 \to 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 \to 9$, e o mesmo se pode facer para 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 (os números que comezan por 0 non son formalmente números de dúas cifras, pero dado que é xerado aleatoriamente pode ocorrer que comece por 0). Neste caso, a probabilidade pedida é:

$$p = \frac{1}{90}$$

82.2. Cos 10 díxitos podemos escribir 81 números binarios de cifras distintas: empezando por 1 podemos formar $1 \to 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 \to 9$, e o mesmo se pode facer para 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (neste caso non se considera o 0, dado que ningún número que comece por 0 se considera de dúas cifras). Neste caso a probabilidade pedida é:

$$p = \frac{1}{81}$$

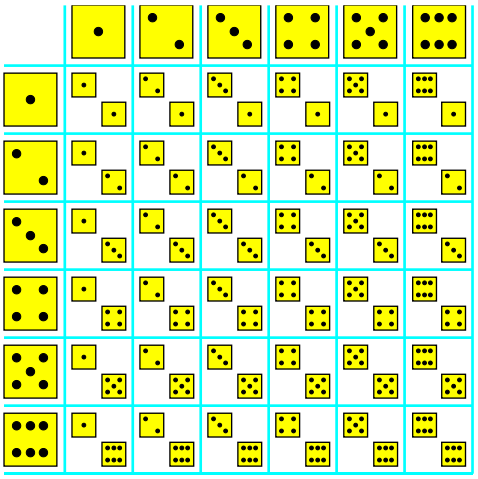
83. Cal é a probabilidade de que ao lanzar dous dados a suma dos puntos nas caras sexa 5 e o produto 4?

Solución:

Dos 36 posibles casos que se obteñen ao lanzar dous dados, só hai 2 no que a suma das dos valores obtidos é 5 e o produto é 4: $(1,4)$ e $(4,1)$. Polo tanto, a probabilidade pedida é:

$$p = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

84. Tíranse dous dados. Calcula a probabilidade de que a suma dos puntos aparecidos nas caras sexa igual a 7.



Solución:

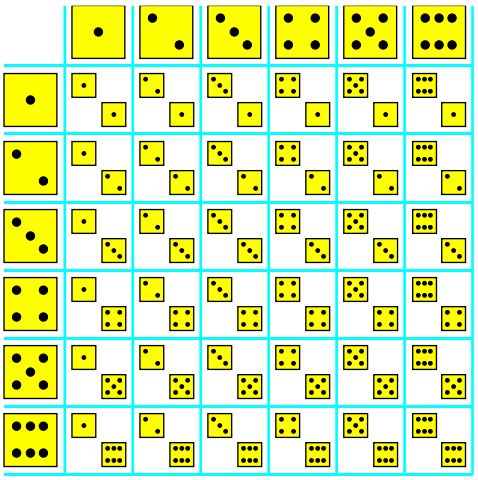
Dos 36 casos posibles que se dan ao tirar dous dados só 6 producen unha suma igual a 7: $(1,6)$, $(2,5)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(5,2)$ e $(6,1)$. Polo tanto, a probabilidade pedida é:

$$p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

85. Tíranse dous dados. Calcula a probabilidade dos seguintes sucesos:

85.1. A suma dos puntos aparecidos sexa 8 e a diferenza 4.

85.2. A suma dos puntos aparecidos sexa igual a 8, se se sabe que a súa diferenza é igual a 4.



Solución:

85.1. Ao lanzar dous dados obtense un espazo mostral de 36 elementos. Os que suman 8 e se diferenzan en 4 son: $(6,2)$ e $(2,6)$, polo que a probabilidade pedida é:

$$p = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

85.2. Ao lanzar dous dados o espazo mostral formado polos resultados que se diferenzan en 4 é: $(1,5)$, $(2,6)$, $(6,2)$ e $(5,1)$, e deles só dous $(6,2)$ e $(2,6)$ suman 8. Polo tanto, a probabilidade pedida é:

$$p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

86. Calcula a probabilidade de que ao lanzar unha moeda dúas veces apareza, ao menos unha vez, unha cruz.

Solución:

Sexa C o suceso $C=\{\text{aparece ao menos unha cruz}\}$; é máis fácil calcular a probabilidade do suceso complementario $\overline{C}=\{\text{non aparece ningunha cruz}\}$, é dicir, que apareza cara nas dúas tiradas.

$$p\left(\overline{C}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\ \rightarrow\ p(C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

87. Nunha caixa hai 6 cubos iguais e numerados con números distintos. De un a un extráense aleatoriamente todos os cubos da caixa. Calcula a probabilidade de que os cubos extraídos aparecen en orde crecente.

Solución:

Sen perda de xeneralidade podemos supoñer que os cubos están numerados cos números 1, 2, 3, 4, 5 e 6. As extraccións poden facerse de $P6=6!=720$ maneiras distintas, e só hai 1 favorable para efectuar a extracción en orde crecente: $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$. Polo tanto, a probabilidade pedida é:

$$p=\frac{1}{720}$$

88. Lánzanse tres dados. Calcula a probabilidade de que apareza o seis nun dado (indistintamente en calquera deles), se nas caras dos outros dous dados aparecen un número distinto de puntos (non igual a 6).

Solución:

O número total de resultados elementais do experimento é igual ao número de combinacións de seis elementos tomados de tres a tres, é dicir:

$$C_6^3=\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!\cdot 3!}=20.$$

O número de resultados favorables a aparición do 6 nunha cara e un número diferente de puntos (non igual a seis) nas caras dos outros dados é igual ao número de combinacións cinco elementos dous a dous, é dicir:

$$C_5^2=\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$$

Polo tanto, a probabilidade pedida é $p=\dfrac{C_5^2}{C_6^3}=\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}$.

89. Nun paquete hai 20 tarxetas perforadas marcadas cos números 101, 102, …, 120 e colocadas aleatoriamente. A persoa encargada do perforado extrae ao chou dúas tarxetas. Calcula a probabilidade de que sexan escollidas as tarxetas perforadas cos números 101 e 120.

Solución:

Dado que non inflúe o orden da extracción das tarxetas, o número posible de maneiras de extraelas é a combinación de vinte elementos dous a dous, é dicir:

$$C_{20}^2=\binom{20}{2}=\frac{20!}{2!\cdot 18!}=190$$

E só hai un caso favorable para a extracción das tarxetas perforadas cos números 101 e 120. Polo tanto, a probabilidade pedida é:

$$p=\frac{1}{190}$$

90. Unha caixa contén 10 pezas idénticas marcadas cos números 1, 2, …, 10. Cóllese ao chou 6 pezas. Calcula a probabilidade de que entre as pezas extraídas resulten:

90.1. A peza nº 1.

90.2. As pezas nº 1 e nº 2.

Solución:

O número total de resultados elementais posibles do experimento é igual ao número de procedementos polos cales se poden extraer 6 pezas de 10. É dicir:

$$C_{10}^6=\binom{10}{6}=\frac{10!}{6!\cdot 4!}=210$$

90.1. Contamos o número de casos favorables ao resultado que nos interesa: entre as seis pezas seleccionadas está a peza nº 1 e, polo tanto, as 5 pezas restantes teñen outros números. O número de tales resultados é, evidentemente, igual ao número de procedementos cos que se poden escoller cinco pezas das nove restantes. É dicir:

$$C_9^5 = \binom{9}{5} = \frac{9!}{4!\cdot 5!} = 126$$

Polo tanto, a probabilidade pedida é $p = \frac{C_9^5}{C_{10}^6} = \frac{126}{210} = \frac{3}{5}$.

90.2. O número de resultados favorables ao suceso que nos interesa (que entre as pezas escollidas aparezan o nº 1 e o nº 2, e polo tanto, 4 pezas teñen outros números) é igual ao número de procedementos cos que se poden escoller 4 pezas das 8 pezas restantes. É dicir:

$$C_8^4 = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!\cdot 4!} = 70$$

Polo tanto, a probabilidade buscada é $p = \frac{C_8^4}{C_{10}^6} = \frac{70}{210} = \frac{1}{3}$.

91. Nunha caixa hai 15 pezas, e 10 delas están pintadas. Un montador extrae ao chou 3 pezas. Calcula a probabilidade de que as pezas escollidas estean pintadas.

Solución:

O número total de resultados elementais posibles do experimento é igual ao número de procedementos polos que se poden sacar 3 pezas de 15. É dicir:

$$C_{15}^3 = \binom{15}{3} = \frac{15!}{3!\cdot 12!} = 455$$

O número de casos favorables é igual ao número de procedementos polos que se poden escoller 3 pezas de 10. É dicir:

$$C_{10}^3 = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = 120$$

Polo tanto, a probabilidade pedida é $p = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{120}{455} = \frac{24}{91}$.

92. Entre 100 fotografías dun sobre está a foto buscada. Do sobre sácanse ao chou 10 fotos. Calcula a probabilidade de que entre elas resulte a foto necesaria.

Solución:

O número total maneiras en que podemos sacar 10 fotos dun sobre de 100 fotos é C_{100}^{10}.

Para que saia a foto buscada, as outras 9 teñen que ser distintas da desexada, e o número de casos favorables será igual ao número de maneiras con que podemos sacar as outras 9 fotos de entre as 99 fotos non desexadas, é dicir C_{99}^9.

Polo tanto, a probabilidade pedida é:

$$p = \frac{C_{99}^9}{C_{100}^{10}} = \frac{\frac{99!}{9!\cdot 90!}}{\frac{100!}{10!\cdot 90!}} = \frac{99!\cdot 10!\cdot 90!}{100!\cdot 9!\cdot 90!} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

93. Unha caixa contén 100 pezas, das cales 10 son defectuosas. Extráense ao chou 4 pezas. Calcula a probabilidade que hai de que entre as pezas escollidas:

93.1. Non haxa defectuosas.

93.2. Non haxa pezas útiles.

Solución:

O número de casos posibles é igual ao número de maneiras de seleccionar 4 pezas de 100: C_{100}^4.

93.1. O número de casos favorables é igual ao número de maneiras de seleccionar 4 pezas de entre 90 non defectuosas, C_{90}^4. Polo tanto, neste caso a probabilidade pedida é:

$$p = \frac{C_{90}^4}{C_{100}^4} = \frac{\frac{90!}{4!\cdot 86!}}{\frac{100!}{4!\cdot 96!}} = \frac{90!\cdot 4!\cdot 96!}{100!\cdot 4!\cdot 86!} = \frac{15486}{23765} \approx 0.65163$$

93.2. O número de casos favorables é igual ao número de maneiras de seleccionar 4 pezas de entre as 10 pezas defectuosas que hai, C_{10}^4. Polo tanto, a probabilidade pedida é:

$$p = \frac{C_{10}^4}{C_{100}^4} = \frac{\frac{10!}{4!\cdot 6!}}{\frac{100!}{4!\cdot 96!}} = \frac{10!\cdot 4!\cdot 96!}{100!\cdot 4!\cdot 6!} = \frac{2}{37345} \approx 0.00005355$$

94. Un dispositivo contén 5 elementos, dos cales 2 están desgastados. Ao poñer en funcionamento o dispositivo conéctanse de maneira aleatoria 2 elementos. Calcula a probabilidade de que resulten conectados os elementos non desgastados.

Solución:

O número de casos posibles é igual ao número de maneiras de seleccionar tres elementos (non desgastados) dos cinco dispoñibles: C_5^3.

O número de casos favorables é igual ao número de maneiras de seleccionar dous elementos de entre os tres non desgastados: C_3^2. Polo tanto, a probabilidade pedida é:

$$p=\frac{C_3^2}{C_5^3}=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}}=\frac{\frac{3!}{2!\cdot 1!}}{\frac{5!}{3!\cdot 2!}}=\frac{3!\cdot 3!\cdot 2!}{5!\cdot 2!\cdot 1!}=\frac{3}{10}$$

95. Ao marcar o número de teléfono, un usuario esqueceu as tres últimas cifras, e lembrando só que son distintas, marcounas ao chou. Calcula a probabilidade de que se marcaran as cifras necesarias.

Solución:

Evidentemente, inflúe o orde das cifras, polo que o número total de casos que se poden dar é igual ao número de variacións dos 10 díxitos tomadas de tres a tres: V_{10}^3, e só hai 1 caso en que coincida con número buscado. Así, a probabilidade pedida é:

$$p=\frac{1}{V_{10}^3}=\frac{1}{\frac{10!}{7!}}=\frac{7!}{10!}=\frac{1}{10\cdot 9\cdot 8}=\frac{1}{720}$$

96. Nunha partida de N pezas hai n pezas estándar. Escóllense m pezas ao chou. Calcula a probabilidade de que entre as pezas escollidas haxa k estándar.

Solución:

O número total de resultados elementais posibles do experimento é igual ao número de procedementos cos que se poden extraer m pezas de N pezas: C_N^m.

Contamos o número de resultados favorables ao suceso que nos interesa (entre as m pezas hai exactamente k estándar): k pezas estándar poden escollerse de entre as n pezas estándar de C_n^k maneiras; neste caso, as $m-k$ pezas restantes deben ser non estándar: pódense tomar $m-k$ pezas non estándar de entre as $N-n$ pezas non estándar de C_{N-n}^{m-k} procedementos distintos. De aí tense que o número de casos favorables é igual a $C_n^k\cdot C_{N-n}^{m-k}$.

Polo tanto, a probabilidade pedida é igual á relación entre o número de casos favorables ao suceso e o número total de resultados elementais:

$$p=\frac{C_n^k\cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$$

97. Nun taller traballan 6 homes e 4 mulleres. Segundo o número de ficha elixíronse ao chou 7 persoas. Calcula a probabilidade de que entre as persoas seleccionadas resultan 3 mulleres.

Solución:

O número total de resultados elementais posibles do experimento aleatorio é igual ao número de procedementos cos que se poden extraer 7 persoas dun grupo de 10 persoas: C_{10}^7.

Para calcular o número de casos favorables ao experimento hai que ter en conta o seguinte: hai que considerar o número de casos posibles en que podemos escoller 3 mulleres dun colectivo de 4 mulleres: C_4^3;

se van 3 mulleres no grupo de 7, as outras 4 persoas serán homes, que poden escollerse de C_6^4 de entre o colectivo de 6 homes. Polo tanto, o número de caso favorables é $C_4^3\cdot C_6^4$.

Así a probabilidade pedida é:

$$p=\frac{C_4^3\cdot C_6^4}{C_{10}^7}=\frac{\frac{4!}{3!\cdot 1!}\cdot\frac{6!}{4!\cdot 2!}}{\frac{10!}{7!\cdot 3!}}=\frac{4!\cdot 6!\cdot 7!\cdot 3!}{10!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 4!\cdot 2!}=\frac{720}{11440}=\frac{1}{2}$$

98. Nun almacén de froita hai 15 melóns, dos cales 10 son da horta de Betanzos. Calcula a probabilidade de entre 5 melóns escollidos ao chou resulten 3 cultivados en Betanzos.

Solución:

O número total de resultados elementais posibles do experimento aleatorio é igual ao número de procedementos polos que podemos escoller 5 melóns dun grupo de 15 melóns: C_{15}^5.

O número de casos favorables obtense do número de procedementos polos que podemos escoller 3 melóns da horta brigantina de entre 10 melóns desta procedencia, C_{10}^3, xunto co número de procedementos de obter os outros 2 melóns de entre os 5 que non se cultivaron en Betanzos, C_5^2; é dicir, o número de casos favorables é $C_{10}^3\cdot C_5^2$.

Polo tanto, a probabilidade pedida é:

$$p=\frac{C_{10}^3\cdot C_5^2}{C_{15}^5}=\frac{\binom{10}{3}\binom{5}{2}}{\binom{15}{5}}=\frac{400}{1001}$$

99. Dun grupo de 12 estudantes 8 teñen sobresaínte en matemáticas. Por orde de lista escolléronse 9 estudantes ao chou; cal é a probabilidade de que entre os estudantes seleccionados haxa 5 sobresaíntes en matemáticas?

Solución:

O número total de resultados elementais do experimento aleatorio é igual ao número de maneiras distintas nas que podemos escoller 9 estudantes de entre un grupo de 12: C_{12}^{9}.

O número de casos favorables ao experimento é o produto do número de maneiras en que se poden escoller 5 alumnos sobresaíntes de entre os 8 que teñen sobresaínte en matemáticas $\left(C_8^5\right)$ multiplicado polo número de formas en que podemos escoller os outros 4 $(9-5=4)$ alumnos de entre os 4 $(12-8=4)$ alumnos non sobresaíntes en matemáticas. C_4^4. É dicir, o número de casos favorabeis é $C_8^5 \cdot C_4^4$.

Así, a probabilidade pedida é:

$$p=\frac{C_8^5 \cdot C_4^4}{C_{12}^9}=\frac{14}{55}$$

100. Nunha caixa hai 5 produtos idénticos, 3 dos cales están pintados. Extráense ao chou 2 produtos. Calcula a probabilidade de que entre os produtos extraídos resulten:

100.1. Un produto pintado.

100.2. Dous produtos pintados.

100.3. Que saia algún produto pintado.

Solución:

O número total de resultados do experimento aleatorio é igual ao número de maneiras que se poden sacar 2 produtos dun colectivo de 5: C_5^2.

100.1. O número de casos favorables, neste apartado, é o igual ao número de maneiras en que podemos escoller 1 produto pintado de entre 3 $\left(C_3^1\right)$ multiplicado polo número de procedementos polos que podemos escoller 1 produto non pintado de entre os 2 non pintados que hai $\left(C_2^1\right)$; é dicir: $C_3^1 \cdot C_2^1$. Polo tanto, a probabilidade pedida, neste caso, é:

$$p=\frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$$

100.2. Neste caso o número de casos favorables é igual ao número de procedementos mediante os que podemos escoller 2 produtos pintados de entre os 3 existentes: C_3^2. Así, a probabilidade pedida é:

$$p=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$$

100.3. Neste caso resulta máis fácil calcular a probabilidade de non extraer ningún produto pintado, e logo obter a probabilidade do seu complementario. O número de casos favorables é igual ao número de procedementos mediante os que podemos escoller 2 produtos non pintados de entre os 2 non pintados: C_2^2. Polo tanto:

$$p(\text{non pintado})=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10} \rightarrow p(\text{algún pintado})=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

101. Unha pechadura "de combinación" ten sobre o seu eixe xeral 4 discos, cada un dos cales está dividido en 5 sectores con distintas cifras escritas sobre eles. A pechadura só se abre cando os discos ocupan unha posición tal que as súas cifras formen unha cuaterna determinada. Calcula a probabilidade de que a cerradura poda abrirse ao colocar os discos aleatoriamente.

Solución:

O número total de casos elementais deste experimento é o número de procedementos ordenados polos que se poden colocar os 5 sectores tomados de 4 en 4, podendo repetirse: $VR_5^4=5^4$. Así, a probabilidade pedida é:

$$p=\frac{1}{5^4}=\frac{1}{625}$$

102. A sección de control técnico descubriu 5 libros defectuosos nunha partida de 100 libros tomados fortuitamente. Calcula a frecuencia relativa de aparición dos libros defectuosos.

Solución:

A frecuencia relativa do suceso $A = \{\text{aparición dun libro defectuoso}\}$ é igual á relación entre o número de probas nas que apareceu o suceso A e o número total de probas realizadas:

$$w(A) = \frac{5}{100} = 0.05$$

103. Un baloncestista efectúa 20 lanzamentos dende un punto, rexistrando 18 encestes. Calcula a frecuencia relativa de enceste.

Solución:

A frecuencia relativa do número de encestes é igual ao número de encestes dividido entre o número total de lanzamentos:

$$w = \frac{18}{20} = \frac{9}{10} = 0.9$$

104. Ao probar unha partida de aparatos, a frecuencia relativa dos aparatos útiles resultou ser igual a 0.9. Cal é o número de aparatos útiles se en total foron verificados 200 aparatos?

Solución:

Sexa u o número de aparatos útiles. Da frecuencia relativa tense que:

$$\frac{u}{200} = 0.9 \rightarrow u = 180$$

co que resultan 180 aparatos útiles.

4.3. Probabilidades xeométricas

Supoñamos que o segmento l é parte dun segmento L. Sobre o segmento L márcase un punto ao chou. Admitindo que a probabilidade de que o punto caia no segmento l é proporcional á lonxitude deste segmento e non depende da súa posición con respecto ao segmento L, a probabilidade de incidencia do punto sobre o segmento l determínase pola igualdade seguinte:

$$p = \frac{\text{Lonxitude de } l}{\text{Lonxitude de } L}$$

Sexa a figura plana g parte dunha figura plana G. Sobre a figura G marcouse un punto ao chou. Supoñendo que a probabilidade de que o punto caia sobre a figura g é proporcional á superficie desta figura e non depende nin da súa ubicación respecto a G, nin da forma de g, a probabilidade de que un punto caia na figura g determínase pola igualdade seguinte:

$$p = \frac{\text{Superficie } g}{\text{Superficie } G}$$

Analogamente se determina a probabilidade de que un punto caia na figura espacial tridimensional v que forma parte da figura V:

$$p = \frac{\text{Volume } v}{\text{Volume } V}$$

105. No segmento L de 20 cm de lonxitude atópase un segmento menor l de 10 cm lonxitude. Calcula a probabilidade de que un punto marcado ao azar en L caia tamén sobre o segmento l. Suponse que a probabilidade de que un punto caia nun segmento é proporcional á lonxitude do mesmo e non depende da súa situación.

Solución:

$p = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

106. Sobre o segmento OA de lonxitude L do eixe numérico OX márcase ao chou o punto B. Calcula a probabilidade de que o menor dos segmentos OB e BA terá unha lonxitude maior que $1/3$. Suponse que a probabilidade de que o punto incida no segmento é proporcional á lonxitude do mesmo e non depende da situación sobre o eixe numérico.

Solución:

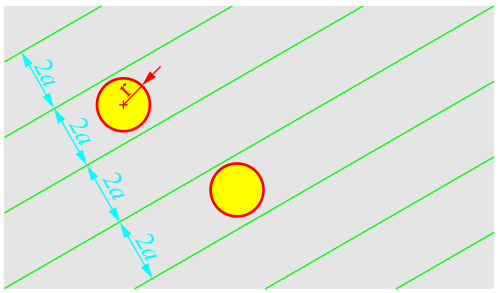
$p = \frac{L/3}{L} = \frac{1}{3}$.

107. Un plano está raiado por rectas paralelas separadas entre si pola distancia $2a$. Sobre ese plano lánzase ao chou unha moeda de radio $r < a$. Calcula a probabilidade de que a moeda non corte ningunha das rectas.

Solución:

As marxes que quedarían fora da moeda miden $2a - 2r$. Polo tanto, a probabilidade pedida é

$$p = \frac{2a - 2r}{2a} = \frac{a - r}{a}.$$

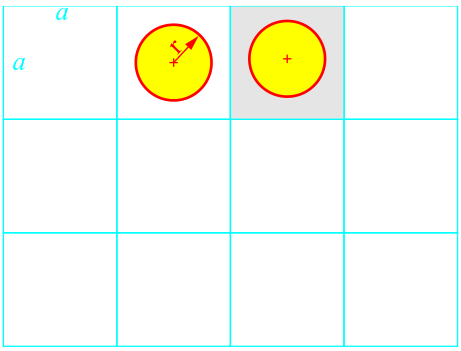


108. Sobre un plano trazouse unha cuadrícula de lado a. Sobre o plano lánzase ao chou unha moeda de radio $r < \frac{a}{2}$. Calcula a probabilidade de que a moeda non corte a ningún dos lados do cadrado. Suponse que a probabilidade de que o punto caia sobre a figura plana é proporcional á superficie da figura e non depende da súa situación.

Solución:

O espazo "sobrante" dende a moeda aos lados do cadrado mide $(a - 2r)^2$, polo que a probabilidade pedida é

$$p = \frac{(a - 2r)^2}{a^2}$$



109. Un plano está raiado por rectas paralelas distantes a 6 cm entre si. Sobre o plano trazouse ao azar un círculo de 1 cm de radio. Calcula a probabilidade de que o círculo non interseque a ningunha das rectas. Suponse que a probabilidade de que un punto caia nun segmento é proporcional á lonxitude do segmento e non depende da súa posición.

Solución:

$$p = \frac{6 - 2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

110. Sobre un plano trazáronse dúas circunferencias concéntricas de radios 5 cm e 10 cm respectivamente. Calcula a probabilidade de que un punto marcado ao azar na circunferencia maior caia tamén no anel formado polas circunferencias. Suponse que a probabilidade de que un punto incida nunha figura plana é proporcional á área desta figura e non depende da súa situación.

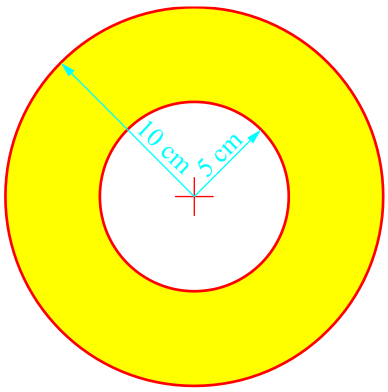
Solución:

A superficie do anel mide:

$$S_A = \pi \cdot 10^2 - \pi \cdot 5^2 = \pi \cdot (10^2 - 5^2)$$

Polo tanto, a probabilidade pedida é:

$$p = \frac{\pi \cdot (10^2 - 5^2)}{\pi \cdot 10^2} = \frac{10^2 - 5^2}{10^2} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4} = 0.75.$$



111. Nun círculo de radio R atópase un círculo menor de radio r. Calcula a probabilidade de que o punto marcado ao azar no círculo maior caia tamén no círculo menor. Suponse que a probabilidade de que o punto caia no círculo é proporcional á superficie do mesmo e non depende da súa situación.

Solución:

Dado que a superficie dun círculo é $S = \pi r^2$, a probabilidade pedida é $p = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{r^2}{R^2}$.

112. Dentro dun círculo de radio r márcase ao chou un punto. Calcular a probabilidade de que o punto resulte no interior:

112.1. Dun cadrado inscrito no círculo.

112.2. De un triángulo equilátero inscrito no círculo.

Suponse que a probabilidade de que un punto caia nunha parte do círculo é proporcional á superficie desta parte e non depende da súa posición con respecto ao círculo.

Solución:

112.1. O lado do cadrado inscrito nun círculo de radio r é

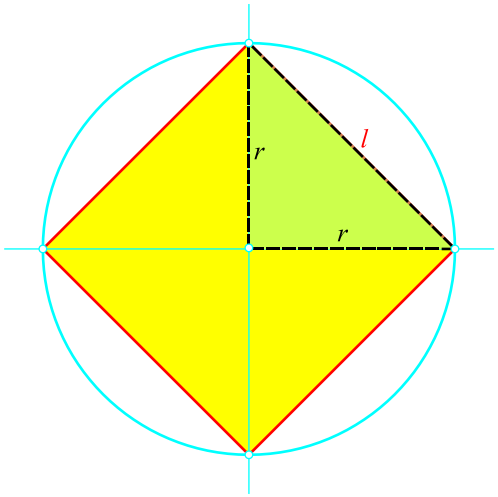
$l=\sqrt{r^2+r^2}=r\sqrt{2}$.

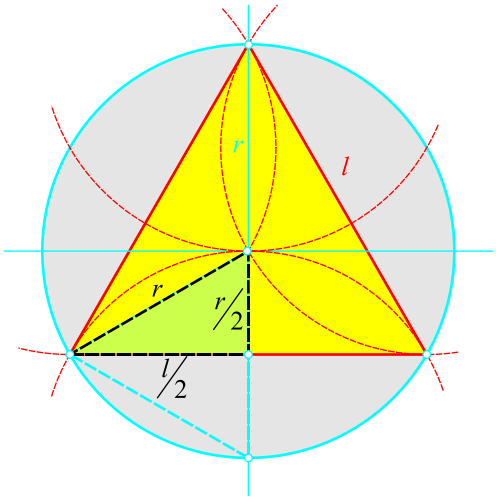
Polo tanto, a área do cadrado inscrito é:

$$S_C=\left(\sqrt{2}\cdot r\right)^2=2r^2$$

Polo tanto, a probabilidade pedida é:

$$p=\frac{2r^2}{\pi r^2}=\frac{2}{\pi}$$





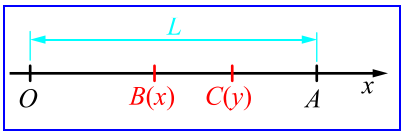
112.2. Sexa un círculo de radio r . Sexa un triángulo equilátero inscrito, como se ve na figura adxunta, utilizando figuras auxiliares punteadas. Sexa l a medida do lado dese triángulo.

$$r^2=\left(\frac{l}{2}\right)^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2\rightarrow\left(\frac{l}{2}\right)^2=r^2-\left(\frac{r}{2}\right)^2\rightarrow l=\sqrt{3}r\,.$$

A área do triángulo rectángulo inscrito é $S_T=\dfrac{3\sqrt{3}r^2}{4}$.

Polo tanto, a probabilidade pedida é: $\boxed{p=\dfrac{\frac{3\sqrt{3}r^2}{4}}{\pi r^2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}}$

113. Sobre o segmento OA de lonxitude L do eixe numérico Ox marcáronse ao azar dous puntos $B(x)$ e $C(y)$ e ademais $y\geq x$ (as coordenadas de B e C son x e y). Calcula a probabilidade de que a lonxitude do segmento BC sexa menor ca lonxitude do segmento OB . Suponse que a probabilidade de que un punto caia no segmento é proporcional á lonxitude dese segmento e non depende da súa situación sobre o eixe numérico.



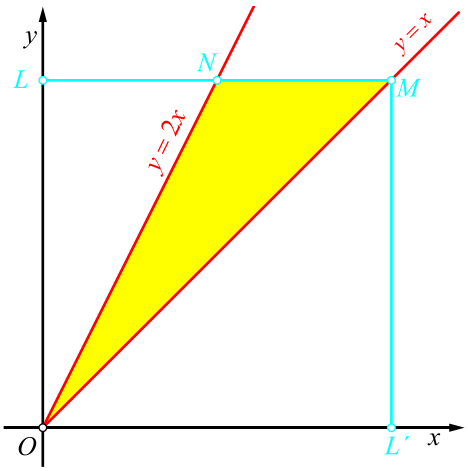
Solución:

As coordenadas dos puntos B e C deben satisfacer as desigualdades $0\leq x\leq L$, $0\leq y\leq L$, $y\geq x$. Introdúcese o sistema de coordenadas cartesianas xOy . Neste sistema as coordenadas de calquera punto pertencente ao triángulo rectángulo ΔOLM satisfacen as desigualdades anteriores, como se ve na figura anexa.

Polo tanto, este triángulo pode considerarse como unha figura G na que as coordenadas dos puntos que o forman son, respectivamente, todos os valores posibles das coordenadas B e C .

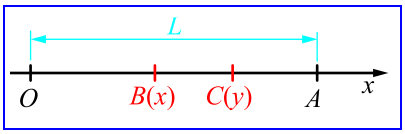
A lonxitude do segmento BC debe ser menor ca lonxitude do segmento OB , é dicir, debe cumprirse a desigualdade: $\boxed{y-x<x\equiv y<2x}$

Esta desigualdade cúmprena as coordenadas dos puntos da figura G , ou sexa, o triángulo OLM que está por debaixo da recta $y=2x$ (recta ON na figura). Na figura vese que todos eses puntos corresponden ao triángulo remarcado ΔONM . Así este triángulo ΔONM pode considerarse como unha figura g , no que as coordenadas dos seus puntos son favorables ao suceso que nos interesa (a lonxitude do segmento BC é menor co da OB). Polo tanto, a probabilidade buscada é igual a



$$\boxed{p=\frac{\text{Superficie } g}{\text{Superficie } G}=\frac{\text{Superficie } \Delta ONM}{\text{Superficie } \Delta OLM}=\frac{1}{2}}$$

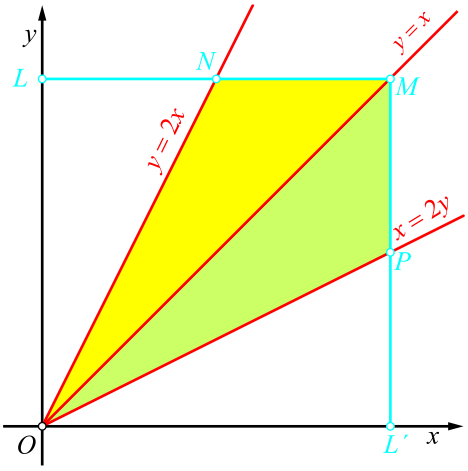
114. Sobre o segmento OA de lonxitude L do eixe numérico Ox marcáronse ao chou dous puntos $B(x)$ e $C(y)$. Calcula a probabilidade de que a lonxitude do segmento BC sexa menor ca distancia dende o punto O ata o punto máis próximo a el.



Suponse que a probabilidade de que o punto caia sobre o segmento é proporcional á lonxitude do mesmo e non depende da súa situación no eixe numérico.

Solución:

As coordenadas dos puntos B e C deben satisfacer as desigualdades $0 \le x \le L$, $0 \le y \le L$. Introdúcese o sistema de coordenadas cartesianas xOy. Neste sistema as coordenadas de calquera punto pertencente ao cadrado $OLML'$. Polo tanto, este cadrado pode considerarse como unha figura G na que as coordenadas dos puntos que o forman son, respectivamente, todos os valores posibles das coordenadas B e C.



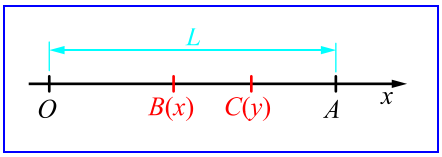
- A lonxitude do segmento BC é $y-x$ cando $y>x$, e neste caso búscase que $y-x<x \equiv \equiv y<2x$, que verifican os puntos do triángulo ΔONM.
- A lonxitude do segmento BC é $x-y$ cando $y<x$, e neste caso búscase que e $x-y<y \equiv \equiv x<2y$, que verifican os puntos do triángulo ΔOMP.

Así os triángulos ΔONM e ΔOMP poden considerarse como unha figura g, no que as coordenadas dos seus puntos son favorables ao suceso que nos interesa (a lonxitude do segmento BC sexa menor ca distancia dende o punto O ata o punto máis próximo a el).

Polo tanto, a probabilidade pedida é:

$$p=\frac{\text{Superficie } g}{\text{Superficie } G}=\frac{\text{Superficie } (\Delta ONM+\Delta OMP)}{\text{Superficie } OLML'}=\frac{1}{2}$$

115. Sobre o segmento OA de lonxitude L do eixe numérico Ox marcáronse ao azar dous puntos $B(x)$ e $C(y)$ (as coordenadas de B e C son x e y). Calcula a probabilidade de que a lonxitude do segmento BC resulte menor ca $L/2$.



Suponse que a probabilidade dun punto caia no segmento é proporcional á lonxitude do segmento e non depende da súa situación sobre o eixe numérico.

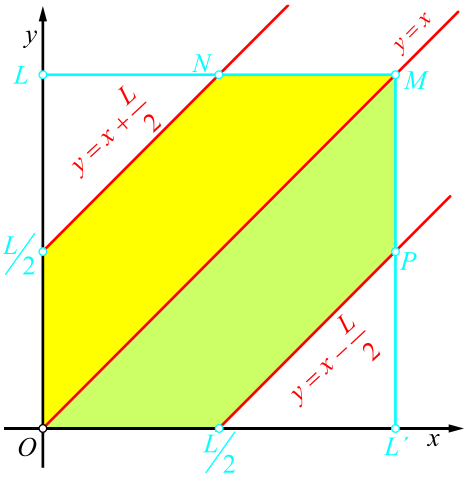
Solución:

As coordenadas dos puntos B e C deben satisfacer as desigualdades $0 \le x \le L$, $0 \le y \le L$. Introdúcese o sistema de coordenadas cartesianas xOy.

Neste sistema as coordenadas de calquera punto pertencente ao cadrado $OLML'$ satisfacen as desigualdades anteriores. Polo tanto, este cadrado pode considerarse como unha figura G na que as coordenadas dos puntos que o forman son, respectivamente, todos os valores posibles das coordenadas B e C.

A lonxitude de BC debe ser menor que $L/2$:

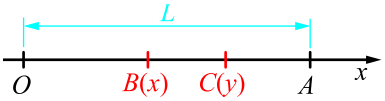
- $y-x<L/2$, $y>x \rightarrow y<x+L/2 \rightarrow OMN\frac{L}{2}$.
- $x-y<L/2$, $y<x \rightarrow y>x-L/2 \rightarrow OMP\frac{L}{2}$.



Así, o conxunto dos cuadriláteros $OMN\frac{L}{2}$ e $OMP\frac{L}{2}$ poden considerarse como unha figura g, no que as coordenadas dos seus puntos son favorables ao suceso que nos interesa (que a lonxitude do segmento BC resulte menor ca $\frac{L}{2}$). Polo tanto, a probabilidade pedida é:

$$p=\frac{\text{Superficie } g}{\text{Superficie } G}=\frac{\text{Superficie } \left(OMN\frac{L}{2}\cup OMP\frac{L}{2}\right)}{\text{Superficie } OLML'}=\frac{3}{4}=0.75.$$

116. Sobre o segmento OA de lonxitude L do eixe numérico Ox marcáronse ao azar dous puntos $B(x)$ e $C(y)$ e ademais $y \geq x$ (as coordenadas de B e C son x e y).



Calcula a probabilidade de que a lonxitude do segmento BC resulte menor ca $L/2$. Suponse que a probabilidade dun punto caia no segmento é proporcional á lonxitude do segmento e non depende da súa situación sobre o eixe numérico.

Solución:

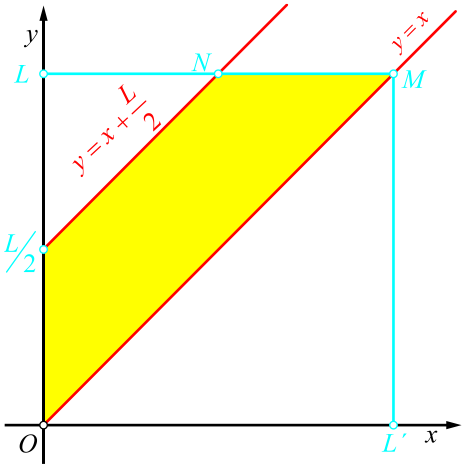
As coordenadas dos puntos B e C deben satisfacer as desigualdades $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq L$, $y \geq x$. Introdúcese o sistema de coordenadas cartesianas xOy. Neste sistema as coordenadas de calquera punto pertencente ao triángulo rectángulo ΔOLM satisfacen as desigualdades anteriores.

Polo tanto, este triángulo pode ser considerada como unha figura G na que as coordenadas dos puntos que o forman son, respectivamente, todos os valores posibles das coordenadas B e C.

A lonxitude do segmento BC debe ser menor que $L/2 \rightarrow y - x \leq L/2$.

Así o cuadrilátero $OMN\frac{L}{2}$ pode considerarse como unha figura g, no que as coordenadas dos seus puntos son favorables ao suceso que nos interesa (que a lonxitude do segmento BC resulte menor ca $L/2$).

Polo tanto, a probabilidade pedida é:



$$p = \frac{\text{Superficie } g}{\text{Superficie } G} = \frac{\text{Superficie } OMN\frac{L}{2}}{\text{Superficie } \Delta OLM} = \frac{3}{4} = 0.75 .$$

117. Un disco que xira rapidamente está dividido nun número par de sectores circulares iguais, pintados alternativamente de cor negro e branco. Faise un disparo ao disco. Calcula a probabilidade de que a bala incida nun dos sectores brancos. Suponse que a probabilidade de que a bala incida nunha figura plana é proporcional á superficie desta figura.

Solución:

Sexa r o radio do disco. Como o disco está dividido nun número par de sectores circulares iguais, a superficie pintada de branco é igual á superficie pintada de negro, e en calquera dos casos, a metade da superficie do disco.

Polo tanto, a probabilidade pedida é:

$$p = \frac{\frac{\pi r^2}{2}}{\pi r^2} = \frac{1}{2} = 0.5 .$$

4.4. Probabilidade da unión de varios sucesos

Distínguense dous casos:

- Cando os sucesos son incompatibles.
- Cando os sucesos son compatibles.

4.4.1. Probabilidade da unión de sucesos incompatibles

Para sucesos incompatibles, do axioma tres temos:

Se A_1, A_2, …, A_n son sucesos incompatibles, entón

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_n)$$

4.4.2. Probabilidade da unión de sucesos compatibles — regra da adición

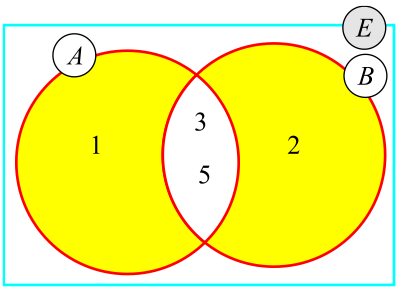
Sexan A e B dous sucesos compatibles dun mesmo experimento aleatorio. Verifícase que a probabilidade da unión é igual á suma das probabilidades de cada un deles menos a probabilidade do suceso intersección de A e B:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Analogamente:

$$P(A \cup B \cup C) = p(A) + P(B) + P(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

118. Consideremos o experimento consistente no lanzamento dun dado. Comproba que se verifica a regra da adición.



Solución:

O espazo mostral deste experimento é:

$E=\{1,2,3,4,5,6\}$.

Consideremos agora os sucesos:

$A=$ «obter número impar» $=\{1,3,5\} \rightarrow p(A)=\frac{3}{6}$.

$B=$ «obter número primo» $=\{2,3,5\} \rightarrow p(B)=\frac{3}{6}$.

Evidentemente estes sucesos son compatibles, xa que a súa intersección non é o suceso imposible. Formemos a unión e a intersección destes sucesos:

$A\cup B=$ «obter número impar ou primo» $=\{1,2,3,5\} \rightarrow p(A\cup B)=\frac{4}{6}$.

$A\cap B=$ «obter número impar e primo» $=\{3,5\} \rightarrow P(A\cap B)=\frac{2}{6}$.

Verifícase que $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, xa que $\frac{4}{6}=\frac{3}{6}+\frac{3}{6}-\frac{2}{6}$.

119. Consideremos o experimento aleatorio consistente en lanzar unha moeda e un dado equilibrados, e consideremos os eventos seguintes:

$A=\{$aparecen caras e un número par$\}$, $B=\{$aparece un número menor de 3$\}$ e $C=\{$aparece unha cruz e un número impar$\}$.

Calcula: $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$, $p(A\cup B)$, $p(B\cap C)$ e $p(B\cap\bar{A}\cap\bar{C})$.

Solución:

O espazo mostral é $E=\{C1, C2, C3, C4, C5, C6, +1, +2, +3, +4, +5, +6\}$. Así:

$A=\{C2, C4, C6\}$, $\bar{A}=\{C1, C3, C5, +1, +2, +3, +4, +5, +6\}$, $B\{C1, C2, +1, +2\}$, $C=\{+1, +3, +5\}$ e

$\bar{C}=\{C1, C2, C3, C4, C5, C6, +2, +4, +6\}$.

Así tense:

$A\cup B=\{C1, C2; C4, C6; +1, +2\}$, $B\cap C=\{+1\}$, $B\cap\bar{A}\cap\bar{C}=\{C1, +2\}$.

Dado que é un espazo equiprobable, tense:

$p(A)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$, $p(B)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$, $p(C)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$, $p(A\cup B)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$, $P(B\cap C)=\frac{1}{12}$, $p(B\cap\bar{A}\cap\bar{C})=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

4.5. Probabilidade condicionada

Do estudio de distribución bidimensionais de frecuencias temos a seguinte definición:

A frecuencia relativa $h_A(B)\equiv h(B/A)$ recibe o nome de *frecuencia relativa do suceso B condicionada ao suceso A*. Ademais verifícase que

$$h_A(B)\equiv h(B/A)=\frac{h(A\cap B)}{h(A)}$$

120. O resultado dunha enquisa sobre a afección ao fútbol realizada sobre 334 estudantes dun instituto, de ambos sexos, de 18 a 21 anos de idade, están rexistrados na táboa adxunta.

	A: homes	$\bar{A}$: mulleres	Σ
B: afeccionados	145	42	187
$\bar{B}$: non afeccionados	51	96	147
Σ	196	138	334

120.1.Calcula as *frecuencias relativas* dos seguintes sucesos: A: «ser home», $\bar{A}$: «ser muller», B: «ter afección ao fútbol», $\bar{B}$: «non ter afección ao fútbol», $A\cap B$: «ser home e afeccionado ao fútbol».

120.2.Calcula a frecuencia relativa do suceso B condicionada a que suceda o suceso A: $h_A(B)$.

Solución:

120.1. $h(A)=\frac{196}{334}$, $h(B)=\frac{187}{334}$, $h(A\cap B)=\frac{145}{334}$, $h(\bar{A})=\frac{138}{334}$, $h(\bar{B})=\frac{147}{334}$.

120.2. $h_A(B) \equiv h(B/A) = \dfrac{145}{196}$, xa que son 145 homes os afeccionados ao fútbol de entre os 196 homes que hai.

A través dun proceso de abstracción, e tendo en conta que a frecuencia relativa dun suceso, despois dunha larga serie de probas, tende á probabilidade —segundo a lei dos grandes números—obtemos a seguinte definición.

Chámase *probabilidade condicionada do suceso* B *respecto do suceso* A, e denotámola por $p(B/A)$ ou $p_A(B)$ ao cociente seguinte:

$$p_A(B) \equiv p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}, \text{ se } p(A) \neq 0$$

Analogamente, a *probabilidade condicionada* do suceso A respecto do suceso B ven dada pola seguinte expresión:

$$p_B(A) \equiv p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}, \text{ se } p(B) \neq 0$$

Das relacións anteriores, obtense:

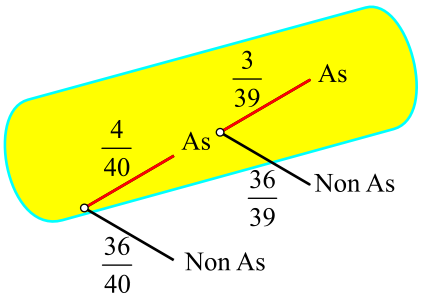
- $p(A \cap B) = p(B/A) \cdot p(A) = p(A) \cdot p(B/A) \equiv p(A \cap B) = p(A) \cdot p_A(B)$.
- $p(A \cap B) = p(A/B) \cdot p(B) = p(B) \cdot p(A/B) \equiv p(A \cap B) = p(B) \cdot p_B(A)$.
- $\begin{cases} p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) \\ p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B) \end{cases} \rightarrow p(A) \cdot p(B/A) = p(B) \cdot p(A/B)$.

Neste documento usaremos indistintamente as dúas notacións $p_A(B) \equiv p(B/A)$.

121. Se se sacan simultaneamente dúas cartas dunha baralla española, ¿cal é probabilidade de obter dous ases?

Solución:

Sexa $A_1 =$ «sacar un as na primeira carta» e $A_2 =$ «sacar un as na segunda carta». Como as dúas cartas se extraen simultaneamente, a extracción simultánea equivale a extraer a primeira, e sen devolvela, extraer a segunda.



O que buscamos é a probabilidade de $A_1 \cap A_2$:

$$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) \cdot p(A_2/A_1) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}.$$

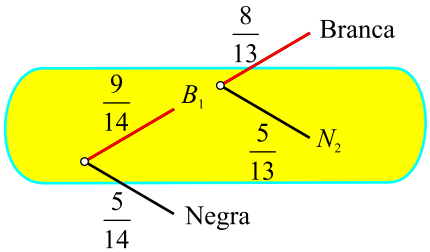
A probabilidade $p(A_2/A_1) = \dfrac{3}{39}$, xa que supoñemos que saíu un as (co que quedan 3 ases por saír e 39 cartas en total).

122. Dunha furna que contén 9 bolas brancas e cinco negras sácanse sucesivamente dúas bolas. Calcula a probabilidade dos seguintes sucesos:

122.1. Que a primeira sexa branca e a segunda negra.

122.2. Que unha sexa branca e outra negra.

Solución:



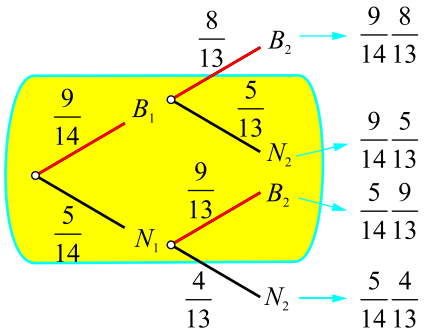
122.1. Sexan:

$B_1 =$ «sacar bola branca na primeira extración»,

$N_2 =$ «sacar bola negra na segunda extracción».

A probabilidade pedida é:

$$p(B_1 \cap N_2) = p(B_1) \cdot p_{B_1}(N_2) = \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} = \frac{45}{182}.$$



$\frac{9}{14}\frac{8}{13}$

$\frac{9}{14}\frac{5}{13}$

$\frac{5}{14}\frac{9}{13}$

$\frac{5}{14}\frac{4}{13}$

122.2. Sacar unha branca e unha negra pode considerarse de dúas formas:

- Sacar primeiro a branca e despois a negra: $(B_1 \cap N_2)$.
- Sacar primeiro a negra e despois a branca: $(N_1 \cap B_2)$.

Así o problema redúcese a calcular a probabilidade do suceso unión:

$$p\big((B_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap B_2)\big) = p(B_1 \cap N_2) + p(N_1 \cap B_2) = \frac{9}{14}\cdot\frac{5}{13} + \frac{5}{14}\cdot\frac{9}{13} = \frac{90}{182} = \frac{45}{91}.$$

123. Unha entidade financeira pretende introducir un sistema semiautomático de concesión de préstamos ao consumo mediante o uso de tarxetas de creto. Para iso analiza o seu ficheiro de préstamos, de características similares, que foron concedidos nos últimos anos, chegando a obter a seguinte información.

— O 5% dos préstamos que se concederon nese período presentaron algún problema no pago.

— O 70% das peticións de préstamos que se fixeran no período analizado informáranse positivamente, cando non houbo incumprimento nos pagos segundo se sabe na actualidade, e concedéronse de acordo cos baremos esixidos en aquela época.

Na actualidade o 80% das solicitudes deste tipo de préstamos cumpren automaticamente as condicións fixadas polo banco, informándose favorablemente. Determina a probabilidade de que estas peticións que son informadas favorablemente non presenten ningún problema no momento da cancelación do préstamo.

Solución:

Designemos os seguintes sucesos:

A: incumprimento no pago; $p(A) = 0.05$. B: informe favorable na solicitude; $p(B) = 0.80$.

$B/\overline{A}$: informe favorable cando non houbo incumprimento de pago; $p(B/\overline{A}) = 0.70$.

$\overline{A}/B$: cumprimento do pago cando o informe foi favorable.

A probabilidade que se pide é $p(\overline{A}/B)$, que pode obterse utilizando a expresión:

$$p(\overline{A})\cdot p(B/\overline{A}) = p(B)\cdot p(\overline{A}/B) \equiv p(\overline{A})\cdot p_{\overline{A}}(B) = p(B)\cdot p_B(\overline{A}) \rightarrow$$

$$\rightarrow p(\overline{A}/B) = \frac{p(\overline{A})\cdot p(B/\overline{A})}{p(B)} = \frac{0.95\cdot 0.70}{0.80} = \frac{133}{160} = 0.83125 \approx 0.83.$$

124. O dono dunha tenda de roupa de home observou o comportamento dos seus clientes durante un largo período de tempo. Como consecuencia dese período de observación afirma que a probabilidade de que un cliente que entre na tenda merque unha camisa é 0.4, pero dos que compran unha camisa o 50% adquiren tamén unha garabata, e só o 10% compran a garabata cando non compran a camisa. Obtén a probabilidade que os clientes compren o seguinte:

124.1. Unha camisa e unha garabata.

124.2. Unha garabata.

124.3. Unha camisa ou unha garabata.

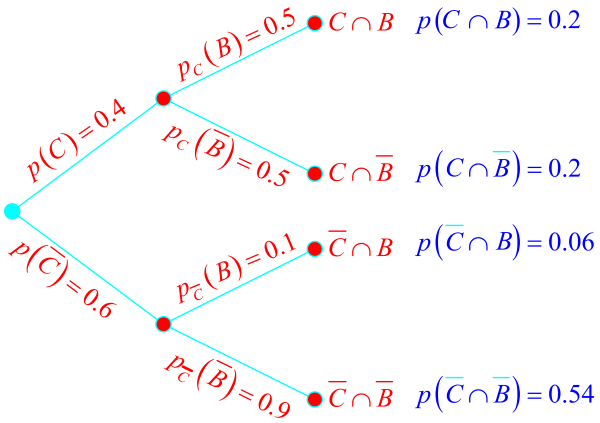
124.4. Unha garabata pero non unha camisa.

Solución:

Sexan os sucesos básicos C: compra unha camisa, B: compra unha garabata.

$p(C) = 0.4 \rightarrow p(\overline{C}) = 0.6$, $p(B/C) \equiv p_C(B) = 0.5$ e

$p(B/\overline{C}) \equiv p_{\overline{C}}(B) = 0.1$.



O espazo mostral para este experimento aleatorio será:

$$E = \{C \cap B, C \cap \overline{B}, \overline{C} \cap B, \overline{C} \cap \overline{B}\}$$

Polo que as probabilidades dos sucesos que se piden serán:

124.1. $p(C \cap B) = p(C)\cdot p(B/C) = p(C)\cdot p_C(B) = 0.4\cdot 0.5 = 0.2$.

124.2. Dado que $p(\overline{C} \cap B) = p(\overline{C})\cdot p(B/\overline{C}) = 0.6\cdot 0.1 = 0.06$ entón verifícase que:

$$p(B) = p\left[(C \cap B) \cup (\overline{C} \cap B)\right] = p(C \cap B) + p(\overline{C} \cap B) = 0.2 + 0.06 = 0.26.$$

124.3. $p(C \cup B) = p(C) + p(B) - p(C \cap B) = 0.4 + 0.26 - 0.2 = 0.46$.

124.4. $p\left(\overline{C}\cap B\right)=p\left(\overline{C}\right)\cdot p_{\overline{C}}\left(B\right)=0.6\cdot 0.1=0.06$.

4.6. Sucesos dependentes e independentes

Cando estudamos varios sucesos, pode ocorrer que a realización do primeiro condicione a probabilidade da realización do segundo ou non.

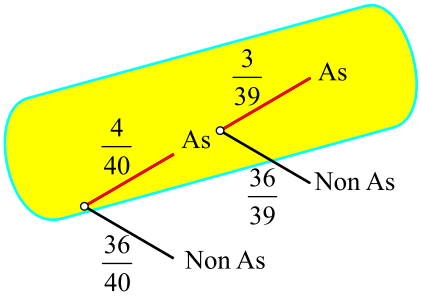
- Dous sucesos A e B son *independentes* se $p(B)=p(B/A)\ \equiv\ p(B)=p_A(B)$.
- Dous sucesos A e B son *dependentes* se $p(B)\neq p(B/A)\ \equiv\ p(B)\neq p_A(B)$.

125. Consideremos o experimento consistente en sacar dúas cartas sucesivas dunha baralla española. Desexamos coñecer a probabilidade de extraer dous ases, nos seguintes casos:

125.1. Sen devolver a carta despois da primeira extracción.

125.2. Devolvéndoa.

Solución:



125.1. O primeiro caso é o exemplo 121, sendo

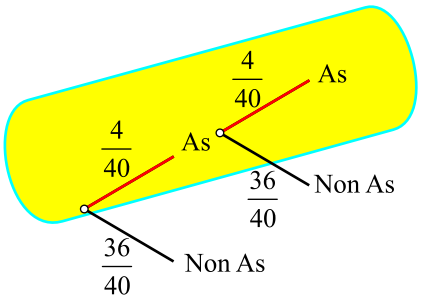
A_1 = «sacar un as na primeira extracción» e

A_2 = «sacar un as na segunda extracción».

O que buscamos é a probabilidade de $A_1\cap A_2$:

$$p(A_1\cap A_2)=p(A_1)\cdot p_{A_1}(A_2)\ =\ \frac{4}{40}\cdot\frac{3}{39}=\frac{1}{130}.$$

A probabilidade $p_{A_1}(A_2)=\dfrac{3}{39}$, xa que supoñemos que saíu un as (co que quedan 3 ases por saír e 39 cartas en total).



125.2. Se a carta se devolve despois da primeira extracción, a composición da baralla antes da segunda extracción é igual que ao comezo do experimento. Polo tanto, a probabilidade de sacar un as na segunda extracción é a mesma que na primeira extracción.

Buscamos é a probabilidade de $A_1\cap A_2$:

$$p(A_1\cap A_2)=p(A_1)\cdot p(A_2/A_1)\ =\ p(A_1)\cdot p(A_2)\ =\ \frac{4}{40}\cdot\frac{4}{40}=\frac{1}{100}.$$

Neste caso, como $p(A_2/A_1)=p(A_2)$, os sucesos A_1 e A_2 son independentes, xa que a realización do suceso A_1 non condiciona a realización de A_2.

Cando as extraccións se realizan con devolución ou reemprazamento, os sucesos son independentes. No caso contrario son dependentes.

Tendo en conta a definición de probabilidade condicionada e a definición de sucesos independentes, tense:

$$\left.\begin{array}{l} p(B/A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)} \\ p(B/A)=p(B) \end{array}\right\}\rightarrow \frac{p(A\cap B)}{p(A)}=p(B)\ \rightarrow\ p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B).$$

4.6.1. Criterios de independencia de sucesos

Na nota anterior vimos unha maneira de caracterizar a independencia de sucesos:

- Dous sucesos A e B son *independentes* se $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)$.
- Dous sucesos A e B son *dependentes* se $p(A\cap B)\neq p(A)\cdot p(B)$.

Tres sucesos A , B e C son *independentes* se verifican simultaneamente as condicións:

① $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)$.

② $p(A\cap C)=p(A)\cdot p(C)$.

③ $p(B\cap C)=p(B)\cdot p(C)$.

④ $p(A\cap B\cap C)=p(A)\cdot p(B)\cdot p(C)$.

— As tres primeiras condicións definen a independencia dous a dous.

☠ Podería parecer que a cuarta condición é redundante ou excesiva, pero a realidade é que esa condición é necesaria, como demostrou *S. N. Bernstein* mediante o seguinte exemplo.

126. Consideremos o experimento aleatorio que ten como espazo mostral $E=\{1,2,3,4\}$ tal que os sucesos elementais son $A=\{1,2\}$, $B=\{1,3\}$ e $C=\{1,4\}$. Estuda a independencia dos sucesos elementais.

Solución:

Dado que: $p(A)=p(B)=p(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ os sucesos son equiprobabeis.

① $p(A\cap B)=\frac{1}{4}=p(A)\cdot p(B)$,

② $p(A\cap C)=\frac{1}{4}=p(A)\cdot p(C)$,

③ $p(B\cap C)=\frac{1}{4}=p(B)\cdot p(C)$.

Como se ve, verifican as tres primeiras condicións, e resulta evidente que non son sucesos independentes.

④ $p(A\cap B\cap C)=\frac{1}{4}\neq p(A)\cdot p(B)\cdot p(C)=\frac{1}{8}$.

Así vese que a necesidade das catro condicións anteriores para poder afirmar a independencia de dous sucesos.

4.7. Estudo da probabilidade en táboas de continxencia

✍ O uso de ***táboas de continxencia*** é adecuado cando o colectivo total se reparte segundo ***dúas características*** e para cada unha delas hai dúas ou máis alternativas mutuamente excluíntes.

	Alfa	Beta	Gamma
Accidente	400	200	400
Non accid.	49600	19800	29600

127. Seguiuse a pista dos accidentes, durante un ano, que tiveron tres marcas de coche distintas: Alfa, Beta e Gamma. Uns tiveron algún accidente e outros non tiveron ningún accidente, como se ve na táboa da esquerda.

Para analizar os datos da táboa de continxencia anterior engádeselle unha fila e unha columna completándoa coas sumas parciais e o total, como se ve na táboa adxunta. Así vese que hai 50000 coches da marca Alfa e que 1000 coches tiveron algún accidente.

	Alfa	Beta	Gamma	Total
Accidente	400	200	400	1000
Non accid.	49600	19800	29600	99000
Total	50000	20000	30000	100000

Se entre os 1000 coches que tiveron un accidente, (AC), se elixe un ao chou, é fácil obter as probabilidades condicionadas:

$$p(\mathrm{Alfa}/\mathrm{AC})=\frac{400}{1000}=0.4\,;\ p(\mathrm{Beta}/\mathrm{AC})=\frac{200}{1000}=0.2\,;\ p(\mathrm{Gamma}/\mathrm{AC})=\frac{400}{1000}=0.4\,.$$

Tamén se pode calcular a probabilidade de que un coche dunha marca teña accidente:

$$p(\mathrm{AC}/\mathrm{Alfa})=\frac{400}{50000}=0.008\,;\ p(\mathrm{AC}/\mathrm{Beta})=\frac{200}{20000}=0.01\,;\ p(\mathrm{AC}/\mathrm{Gamma})=\frac{400}{30000}=0.01\widehat{3}\,.$$

Estes resultados fan ver que a marca máis segura é Alfa e a menos Gamma.

Comparando estas últimas probabilidades condicionadas coa probabilidade total advírtese que os sucesos Beta e AC son independentes mentres que Alfa e Gamma non son independentes con AC .

$$p(\mathrm{AC})=\frac{1000}{100000}=0.01$$

4.8. Probabilidade composta ou da intersección de dous sucesos

Hai experiencias nas que facilmente se poden distinguir dous ou máis etapas.

Os experimentos aleatorios que constan de dúas ou máis etapas chámanse ***probas compostas***.

- O cálculo de probabilidades de sucesos compostos simplifícase moito calculando as probabilidades das súas compoñentes.

- Dúas probas compostas son ***independentes*** cando o resultado dunha non inflúe nas probabilidades dos distintos resultados das outras. Polo tanto, os sucesos correspondentes á primeira son independentes dos sucesos correspondentes á segunda.

128. Lánzase unha moeda e un dado perfectamente equilibrados (sen taras).
É evidente que o resultado dunha non inflúe na outra: son independentes.

- Dúas experiencias ou probas compostas son ***dependentes*** cando o resultado da primeira inflúe nas probabilidades dos sucesos da segunda.

129. Sácanse dúas cartas dunha baralla.
O resultado da segunda depende do obtido na primeira. Por exemplo, se a primeira é un as é menos probable que tamén o sexa a segunda: son probas dependentes.

Hai ocasións nas que as probas ou experimentos probabilísticos non son sucesivos, senón simultáneos. Neste caso, se se pode, resulta vantaxoso pensar nelas como se se sucederan no tempo.

Atendendo ao anterior, para o estudo da probabilidade composta distinguiremos dous casos.

- Cando os sucesos son independentes.
- Cando os sucesos son dependentes.

4.8.1. Probabilidade da intersección de sucesos independentes

Sabemos que se A e B son sucesos independentes, verifícase que $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)$ ou ben que $p(B)=p(B/A)$.

Se A e B son *sucesos independentes*, verifícase que a *probabilidade da intersección de* A *e* B é igual ao produto das probabilidades de cada un deles:

$$p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)$$

Para o caso de *tres sucesos A, B* e *C independentes*:

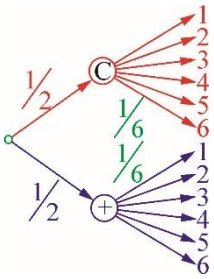
$$p(A\cap B\cap C)=p(A)\cdot p(B)\cdot p(C)$$

Teorema 13. Se A e B son dous sucesos independentes entón tamén o son os sucesos

$$\overline{A} \text{ e } B,\ A \text{ e } \overline{B} \text{ e } \overline{A} \text{ e } \overline{B}$$

130. No exemplo 128 calcula as probabilidades $p(\text{C},3)$ e $p(\text{C e Par})$.

Solución:



Supoñemos que os elementos usados son de Laplace.

Á esquerda facemos un diagrama que resume o problema e á dereita unha táboa para o mesmo.

	1	2	3	4	5	6	
C	C,1	C,2	C,3	C,4	C,5	C,6	1/2
+	+ ,1	+ ,2	+ ,3	+ ,4	+ ,5	+ ,6	1/2
	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	

130.1. $p(\text{C},3)=p(\text{C})\cdot p(3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$.

130.2. $p(\text{C e Par})=p(\text{C})\cdot p(\text{Par})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

131. Calcula a probabilidade de obter tres catros ao lanzar tres dados.

Solución:

Son sucesos independentes: $p(\text{Tres catros})=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}\approx 0.0046$.

132. Calcula a probabilidade de ningún seis ao lanzar catro dados.

Solución:

$$p(\text{Catro veces ningún } 6) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} \approx 0.48 .$$

133. Calcula a probabilidade de obter algún seis ao lanzar catro dados.

Solución:

A probabilidade de obter algún seis é o complementario da probabilidade de non obter ningún seis, obtido no exemplo 132.

$$p(\text{Algún seis}) = 1 - p(\text{Ningún seis}) = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \approx 0.52 .$$

134. Calcula a probabilidade de obter algún seis ao lanzar seis dados.

Solución:

$$p(\text{Ningún } 6) = p(\text{Seis veces ningún seis}) = \left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{15625}{46656} .$$

$$p(\text{Algún seis}) = 1 - \frac{15625}{46656} = \frac{31031}{46656} \approx 0.665 .$$

4.8.2. Probabilidade composta de sucesos dependentes

Da probabilidade condicionada, sábese que $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B/A)$ e tamén se verifica que $p(A\cap B) = p(B)\cdot p(A/B)$. De aquí tense:

Se *A* e *B* son dous *sucesos dependentes* dun mesmo experimento aleatorio, verifícase que a *probabilidade da intersección de A e B* é igual ao produto da probabilidade dun deles, suposta non nula, multiplicada pola probabilidade do outro, condicionada á realización do anterior:

$$p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B/A) \;\equiv\; p(A\cap B) = p(A)\cdot p_A(B)$$

Para o caso de tres sucesos dependentes tense:

$$p(A\cap B\cap C) = p(A)\cdot p(B/A).p(C/A\cap B) \;\equiv\; p(A\cap B\cap C) = p(A)\cdot p_A(B).p_{A\cap B}(C)$$

4.8.3. Teorema da probabilidade composta

Para o caso de *n* sucesos, a probabilidade anterior coñécese co nome de *teorema de probabilidade composta*, e enúnciase así:

Teorema 14. Se A_1, A_2, …, A_n son n sucesos dependentes dun mesmo experimento aleatorio, e tales que a *probabilidade da realización simultánea* dos *n* sucesos non é nula, verifícase que:

$$p(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n) = p(A_1)\cdot p(A_2/A_1)\cdot\cdots\cdot p(A_n/A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n-1})$$

135. Para un exame un alumno só estudou 15 temas dos 25 que contén o cuestionario. O exame consiste en contestar a dous temas extraídos ao chou do total de temas do cuestionario. Calcula a probabilidade de que os dous temas sexan dos que estudou o alumno.

Solución:

Chamemos $E_1 =$ «ter estudado o 1º tema», $E_2 =$ «ter estudado o 2º tema». Pídese a probabilidade do suceso $E_1\cap E_2$. Como os sucesos son dependentes, a probabilidade pedida é:

$$p(E_1\cap E_2) = p(E_1)\cdot p_{E_1}(E_2) = \frac{15}{25}\cdot\frac{14}{24} = \frac{7}{20} = 0.35 .$$

136. Tense unha bolsa con 10 bolas brancas e 6 negras, das que se extraen dúas bolas. Atopa a probabilidade de que as dúas sexan negras:

136.1. Con devolución á bolsa da primeira bola sacada.

136.2. Sen devolución da bola.

Solución:

Sexan $N_1 =$ «sacar negra na 1ª extracción» e $N_2 =$ «sacar negra na 2ª extracción». Pídese a probabilidade do suceso $N_1\cap N_2$.

136.1. Se se devolve a primeira bola extraída, entón os sucesos N_1 e N_2 son independentes; así tense:

$$p(N_1\cap N_2) = p(N_1)\cdot p(N_2) = \frac{6}{16}\cdot\frac{6}{16} = \frac{9}{64} .$$

136.2. Se non se devolve a primeira bola extraída, entón altérase a composición antes da segunda extracción. Polo tanto, o suceso N_1 condiciona o suceso N_2, é dicir, N_1 e N_2 son dependentes.

$$p(N_1 \cap N_2) = p(N_1) \cdot p(N_2/N_1) = \frac{6}{16} \cdot \frac{5}{15} = \frac{1}{8}.$$

137. Lánzase dúas veces ao ar un dado equilibrado. Calcula a probabilidade de obter 4, 5 ou 6 no primeiro lanzamento e 1, 2, 3 ou 6 no segundo.

Solución:

Sexa $A_1 = \{4, 5 \text{ ou } 6 \text{ no primeiro lanzamento}\}$ e $A_2 = \{1, 2, 3, \text{ ou } 4 \text{ no segundo lanzamento}\}$. Estamos buscando $p(A_1 \cap A_2)$.

Facémolo por dous métodos distintos:

I. $p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) \cdot p(A_2/A_1) = p(A_1) \cdot p(A_2) = \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$.

Neste caso utilizamos o feito de que o resultado do segundo lanzamento é independente do primeiro, de maneira que $p(A_2/A_1) = p(A_2)$. Tamén se usa que $p(A_1) = 3/6$ dado que 4, 5 ou 6 son tres resultados equiprobabeis dos seis resultados posibles, e analogamente se obtén que $p(A_2) = 4/6$.

II. Cada unha das 6 maneiras como pode caer un dado no primeiro lanzamento pode asociarse con cada unha das 6 maneiras en que pode caer no segundo lanzamento, obtendo en total $6 \cdot 6 = 36$ formas igualmente probables. Cada unha das 3 maneiras en que pode ocorrer A_1 pode asociarse con cada unha das 4 maneiras en que pode ocorrer A_2, obtendo en total $3 \cdot 4 = 12$ maneiras de ocorrer A_1 e A_2. Entón tense:

$$p(A_1 \cap A_2) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

Isto tamén amosa que A_1 e A_2 son independentes, dado que:

$$p(A_1 \cap A_2) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} = \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = p(A_1) \cdot p(A_2)$$

138. Nun estante dunha biblioteca están colocados aleatoriamente 15 libros, 5 dos cales están encadernados en tela. O bibliotecario colle ao chou 3 libros. Calcula a probabilidade de que polo menos un dos libros escollidos resulte encadernado en tela (suceso A).

Solución:

De dúas maneiras:

I. A condición de que polo menos un dos tres libros resulte encadernado en tela cumprirase se ocorre calquera dos tres sucesos mutuamente excluíntes seguintes:

B: «un libro está encadernado en tela, dous sen encadernación».

C: «dous libros están encadernados en tela, un sen encadernación».

D: «tres manuais están encadernados en tela».

O suceso A que nos interesa (que polo menos un dos manuais está encadernado en tela) pode representarse pola unión destes sucesos: $A = B \cup C \cup D$.

Polo teorema da adición tense que:

$$p(A) = P(B) + p(C) + p(D)$$

Hai que buscar as probabilidades dos sucesos B, C e D:

$$p(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^3} = \frac{45}{91}, \quad p(C) = \frac{C_5^2 \cdot C_{10}^1}{C_{15}^3} = \frac{20}{91}, \quad p(D) = \frac{C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{2}{91}.$$

Polo tanto, $p(A) = P(B) + p(C) + p(D) = \frac{45}{91} + \frac{20}{91} + \frac{2}{91} = \frac{67}{91}$.

II. Os sucesos A: «polo menos un libro dos libros collidos está encadernado en tela» e $\overline{A}$: «ningún dos libros collidos ten encadernación en tela» son opostos, e polo tanto verifícase que $p(A) + p(\overline{A}) = 1 \rightarrow p(A) = 1 - p(\overline{A})$.

A probabilidade de que ocorra o suceso $\overline{A}$: «ningún dos libros collidos está encadernado en tela» é igual a:

$$p(\overline{A}) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{24}{91}$$

Así, a probabilidade buscada é $p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}$.

139. Nunha vila véndense tres xornais, e sábese por diferentes estudos que o 20% len o xornal A, o 30% len o B e o 40% len o C, o 6% len o A e o B, o 7% len o B e o C e o 12% len o A e o C. Decide se son independentes os sucesos «ler cada un dos xornais».

Solución:

Sexan os sucesos A: ler o xornal A, B: ler o xornal B e C: ler o xornal C. Dos datos do problema tense que:

$p(A)=0.2$, $p(B)=0.3$, $p(C)=0.4$, $p(A\cap B)=0.06$, $p(B\cap C)=0.07$ e $p(A\cap C)=0.12$.

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{0.06}{0.3}=0.2=p(A)\ \rightarrow\ A \text{ e } B \text{ son independentes.}$$

$$p(A/C)=\frac{p(A\cap C)}{P(C)}=\frac{0.12}{0.4}=0.3\neq p(A)\ \rightarrow\ A \text{ e } C \text{ non son independentes.}$$

$$p(B/C)=\frac{p(B\cap C)}{p(C)}=\frac{0.07}{0.4}=0.175\neq p(B)\ \rightarrow\ B \text{ e } C \text{ non son independentes.}$$

140. Nunha caixa hai 10 pezas, das cales 4 están pintadas. Un montador colle ao azar 3 pezas. Calcula a probabilidade de que polo menos unha das pezas collidas estea pintada.

Solución:

Sexa A: «ao menos unha das pezas collidas está pintada»; entón $\overline{A}$: «ningunha das pezas collidas está pintada». Calculando $p(\overline{A})$, teríamos que a probabilidade buscada usando $p(A)=1-p(\overline{A})$.

$$p(\overline{A})=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}\ \rightarrow\ p(A)=1-p(\overline{A})=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$$

141. A probabilidade dun impacto en branco nun único disparo dende dous canóns é igual a 0.38. Calcula a probabilidade de facer branco para o primeiro dos canóns nun disparo, se se sabe que para o segunda canón esta probabilidade é igual a 0.8.

Solución:

Sexan A: «fai branco o primeiro canón» e B: «fai branco o segundo canón» e C: «branco nun disparo feito dende os dous canóns».

Dos datos do problema tense que $p(B)=0.8$, $p(\overline{B})=0.2$, $p(C)=0.38$. Así dáse o sistema:

$$\begin{cases} p(A)\cdot 0.2+p(\overline{A})\cdot 0.8=0.38 \\ p(A)+p(\overline{A})=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p(A)=0.7 \\ p(\overline{A})=0.3 \end{cases} \rightarrow \text{a probabilidade pedida é } p(A)=0.7.$$

142. Dous tiradores disparan ao branco. A probabilidade de que fagan branco nun disparo para o primeiro tirador á de 0.7 e para o segundo é do 0.8. Calcula a probabilidade de que nun disparo faga branco só un dos tiradores.

Solución:

Sexa A: «fai branco o primeiro tirador» e B: «fai branco o segundo tirador» e C: «fai branco só un dos tiradores». Tense que $C=(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$.

As probabilidades son: $p(A)=0.7\rightarrow p(\overline{A})=0.3$ e $p(B)=0.8\rightarrow p(\overline{B})=0.2$.

Polo tanto, a probabilidade pedida é:

$$p(C)=p(A)\cdot p(\overline{B})+p(\overline{A})\cdot p(B)=0.7\cdot 0.2+0.3\cdot 0.8=0.38.$$

143. Para a sinalización de emerxencia instaláronse dous indicadores que funcionan independentemente. A probabilidade de que o indicador actúe durante a avaría é igual a 0.95 para o primeiro e 0.9 para o segundo. Calcula a probabilidade de que durante a avaría funcione só un indicador.

Solución:

Sexa A: «funciona o primeiro indicador en caso de avaría», $\overline{A}$; «non funciona o primeiro indicador en caso de avaría», B: «funciona o segundo indicador en caso de avaría» e $\overline{B}$: «non funciona o segundo indicador en caso de avaría».

Tense que $p(A)=0.95\rightarrow p(\overline{A})=1-0.95=0.05$ e $p(B)=0.90\rightarrow p(\overline{B})=1-0.90=0.10$.

Sexa C : «durante a avaría funciona un único indicador». C dáse cando funciona o primeiro indicador e falla o segundo $\left(A\cap\overline{B}\right)$ ou cando falla o primeiro e funciona o segundo $\left(\overline{A}\cap B\right)$:

$C=\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\rightarrow p(C)=p(A)\cdot p\left(\overline{B}\right)+p\left(\overline{A}\right)\cdot p(B)=0.95\cdot 0.10+0.05\cdot 0.90=0.14$.

144. A selección de control técnico verifica o estándar dos artigos. A probabilidade de que un artigo sexa estándar é igual a 0.9. Calcula a probabilidade de que de dous artigos verificados só un deles sexa estándar.

Solución:

Sexan A: «o primeiro artigo é estándar»; tense que $p(A)=0.9\rightarrow p\left(\overline{A}\right)=0.1$ e B: «o segundo artigo é estándar»; tense que $p(B)=0.9\rightarrow p\left(\overline{B}\right)=0.1$. Sexa C : «de dous artigos verificados só un deles é estándar». Tense que $C=\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)$ $\rightarrow$ $p(C)=0.9\cdot 0.1+0.1\cdot 0.9=0.18$ $\rightarrow$ a probabilidade pedida é $p(C)=0.18$.

145. A probabilidade de que nunha medición de certa magnitude física se comenta un erro maior ca precisión prefixada é igual a 0.4. Realizáronse 3 medicións independentes. Calcula a probabilidade de que só nunha delas o erro cometido supera a precisión prefixada.

Solución:

Sexa M_i: «a medición i –ésima ten un erro superior ao prefixado». Tense que $p(M_i)=0.4$ $\rightarrow$ $p\left(\overline{M_i}\right)=0.6$, $i=1,2,3$. Sexa C : «só unha das tres medicións ten un erro superior á precisión prefixada». Entón

$C=\left(M_1\cap\overline{M_2}\cap\overline{M_3}\right)\cup\left(\overline{M_1}\cap M_2\cap\overline{M_3}\right)\cup\left(\overline{M_1}\cap\overline{M_2}\cap M_3\right)$ $\rightarrow$ a probabilidade pedida é:

$p(C)=0.4\cdot 0.6\cdot 0.6+0.6\cdot 0.4\cdot 0.6+0.6\cdot 0.6\cdot 0.4=0.432$.

146. Dunha partida de artigos o perito mercantil selecciona os artigos de calidade superior. A probabilidade de que un artigo tomado ao chou resulte de calidade superior é igual á 0.8. Calcula a probabilidade de que de tres artigos verificados só 2 sexan de calidade superior.

Solución:

Sexa S_i: «o artigo i –ésimo é de calidade superior». Tense que $p(S_i)=0.8\rightarrow p\left(\overline{S_i}\right)=0.2$, con $i=1,2,3$. Sexa o suceso C : «dos tres artigos verificados só 2 son de calidade superior». Este suceso verifícase da seguinte maneira:

$C=\left(S_1\cap S_2\cap\overline{S_3}\right)\cup\left(S_1\cap\overline{S_2}\cap S_3\right)\cup\left(\overline{S_1}\cap S_2\cap S_3\right)$ $\rightarrow$ a probabilidade pedida é:

$p(C)=0.8\cdot 0.8\cdot 0.2+0.8\cdot 0.2\cdot 0.8+0.2\cdot 0.8\cdot 0.8=0.384$.

147. Un estudante busca a fórmula que necesita en tres guías. As probabilidades de que a fórmula estea na primeira, segunda ou terceira guía, respectivamente, son 0.6, 0.7 e 0.8. Calcula a probabilidade de que a fórmula estea:

147.1. Só nunha guía. | 147.2. Só en dúas guías. | 147.3. Nas tres guías.

Solución:

Sexan os sucesos G_i: «a fórmula está na guía *i*-ésima», con $i=1,2,3$. Tense que $p(G_1)=0.6\rightarrow p\left(\overline{G_1}\right)=0.4$, $p(G_2)=0.7\rightarrow$ $\rightarrow$ $p\left(\overline{G_2}\right)=0.3$ e $P(G_3)=0.8\rightarrow p\left(\overline{G_3}\right)=0.2$.

147.1. Sexa C_1: «a fórmula está só nunha guía». Neste caso tense que se o suceso C_1 se obtén de

$C_1=\left(G_1\cap\overline{G_2}\cap\overline{G_3}\right)\cup\left(\overline{G_1}\cap G_2\cap\overline{G_3}\right)\cup\left(\overline{G_1}\cap\overline{G_2}\cap G_3\right)$ $\rightarrow$ $p(C_1)=0.6\cdot 0.3\cdot 0.2+0.4\cdot 0.7\cdot 0.2+0.4\cdot 0.3\cdot 0.8=0.188$.

147.2. Sexa C_2: «a fórmula está en dúas guías». $C_2=\left(G_1\cap G_2\cap\overline{G_3}\right)\cup\left(G_1\cap\overline{G_2}\cap G_3\right)\cup\left(\overline{G_1}\cap G_2\cap G_3\right)$ $\rightarrow$

$\rightarrow$ $p(C_2)=0.6\cdot 0.7\cdot 0.2+0.6\cdot 0.3\cdot 0.8+0.4\cdot 0.7\cdot 0.8=0.452$.

147.3. Sexa C_3: «a fórmula está nas tres guías». $C_3=G_1\cap G_2\cap G_3\rightarrow$ $p(C_3)=0.6\cdot 0.7\cdot 0.8=0.336$.

148. Cantos dados hai que tirar para que con unha probabilidade menor que 0.3 se poida esperar que en ningunha das caras caídas aparezan 6 puntos?

Solución:

Supoñamos as seguintes designacións para os sucesos:

A: en ningunha das caras aparecen 6 puntos.

A_i: na cara caída do i –ésimo dado $(i=1,2,\ldots,n)$ non aparecen 6 puntos.

O suceso que nos interesa consiste na simultaneidade dos sucesos A_1, A_2, …, A_n, é dicir, o suceso $A=A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n$.

A probabilidade de que en calquera das caídas non apareza un 6 é $\frac{5}{6} \rightarrow p(A_i)=\frac{5}{6}$.

Dado que os A_i son sucesos independentes, a probabilidade do suceso de interés é:

$$p(A)=p(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=p(A_1)\cdot p(A_2)\cdot\ldots\cdot p(A_n)=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Como queremos que $\left(\frac{5}{6}\right)^n<0.3\rightarrow n\cdot\log\left(\frac{5}{6}\right)<\log(0.3) \rightarrow n>\frac{\log(0.3)}{\log\left(5/6\right)}=6.6036\cdots$.

Polo tanto, o número de dados buscado debe ser $n\geq 7$.

149. As probabilidades de que a peza que necesita o montador estea na primeira, segunda, terceira ou cuarta caixa, respectivamente, son iguais a 0.6, 0.7, 0.8 e 0.9. Calcula a probabilidade de que a peza se encontre:

149.1. En non máis de tres caixas.

149.2. En non menos de dúas caixas.

Solución:

Sexa C_i: «a peza está na caixa i –ésima», con $i=1,2,3,4$. $p(C_1)=0.6\rightarrow p(\overline{C_1})=0.4$, $p(C_2)=0.7 \rightarrow p(\overline{C_2})=0.3$, $p(C_3)=0.8\rightarrow p(\overline{C_3})=0.2$ e $p(C_4)=0.9\rightarrow p(\overline{C_4})=0.1$.

149.1. Sexa A: «a peza está en non máis de tres caixas». A verifícase sempre que a peza non estea nas catro caixas $\rightarrow$
$\rightarrow p(A)=1-p(C_1\cap C_2\cap C_3\cap C_4)=1-0.6\cdot 0.7\cdot 0.8\cdot 0.9=0.6976$.

149.2. Sexa B: «a peza está en non menos de dúas caixas». B verifícase sempre que a peza ***non*** estea nunha única caixa ou en ningunha caixa.

A peza está nunha única caixa das seguintes maneiras:
$(C_1\cap\overline{C_2}\cap\overline{C_3}\cap\overline{C_4})\cup(\overline{C_1}\cap C_2\cap\overline{C_3}\cap\overline{C_4})\cup(\overline{C_1}\cap\overline{C_2}\cap C_3\cap\overline{C_4})\cup(\overline{C_1}\cap\overline{C_2}\cap\overline{C_3}\cap C_4)\rightarrow$
$\rightarrow p(1)=0.6\cdot 0.3\cdot 0.2\cdot 0.1+0.4\cdot 0.7\cdot 0.2\cdot 0.1+0.4\cdot 0.3\cdot 0.8\cdot 0.1+0.4\cdot 0.3\cdot 0.2+0.9=0.0404$. A peza non está en ningunha caixa da maneira $(\overline{C_1}\cap\overline{C_2}\cap\overline{C_3}\cap\overline{C_4}) \rightarrow p(0)=0.4\cdot 0.3\cdot 0.2\cdot 0.1=0.0024 \rightarrow$ a probabilidade de que a peza estea en unha ou ningunha caixa é $0.0404+0024=0.0428$. Polo tanto, a probabilidade de que a peza está en non menos de dúas caixas é $p(B)=1-0.0428=0.9572$.

150. Lánzanse 3 dados. Calcula as probabilidades dos seguintes sucesos:

150.1. En dúas caras aparece un punto, e na terceira cara, outro número de puntos.

150.2. En dúas caras caídas aparece igual número de puntos, e na terceira cara, outro número de puntos.

150.3. En todas as caras aparece un número distinto de puntos.

Solución:

150.1. A probabilidade de que saian dous uns nos dous primeiros dados é $\frac{1}{6^2}$, e o terceiro dado pode ter un valor distinto de 1 con probabilidade $\frac{5}{6}$, polo que a probabilidade de que nos dous primeiros dados saia 1 e no terceiro calquera valor distinto de 1 é $\frac{1}{6^2}\cdot\frac{5}{6}$, e isto pode facerse de C_3^2 maneiras distintas en que se poden coller os dous 1 entre os 3 dados, polo que a probabilidade pedida é $C_3^2\cdot\left(\frac{1}{6^2}\cdot\frac{5}{6}\right)=\binom{3}{2}\cdot\frac{1}{6^2}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{72}=0.069\widehat{4}$.

150.2. Os dous primeiros dados teñen o mesmo valor con probabilidade $\frac{1}{6^2}$, e o terceiro un valor distinto con probabilidade $5/6$, isto pode facerse para os 6 valores que poden tomar os dous primeiros dados. Polo tanto a probabilidade de que os dous primeiros dados teñan o mesmo valor e o terceiro un valor distinto é de $\frac{1}{6^2}\cdot\frac{5}{6}\cdot 6=\frac{5}{36}$, e isto pode facerse de C_3^2 maneiras distintas nas que dous dados poden ter o mesmo valor, polo que a probabilidade pedida é $C_3^2\cdot\frac{5}{36}=3\cdot\frac{5}{36}=\frac{5}{12}=0.41\widehat{6}$.

150.3. Un dado pode ter calquera valor, o segundo só pode ter un valor distinto con probabilidade $\frac{5}{6}$, e o terceiro terá un valor distinto dos anteriores con probabilidade $\frac{4}{6}$, polo que a probabilidade pedida é $\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{5}{9}=0.\widehat{5}$.

151. Tíranse 3 dados. Calcula as probabilidades dos seguintes sucesos:

151.1. En cada unha das caras aparece 5 puntos.

151.2. En todas as caras aparecen igual número de puntos.

Solución:

151.1. A probabilidade de que aparezan 5 puntos nunha cara é de $\frac{1}{6}$, polo que a probabilidade de que aparezan nas tres é de $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216}=0.004629$.

151.2. A probabilidade de que aparezan nos tres dados os mesmos puntos é $\frac{1}{6^3}$, e como isto pode facerse para as 6 caras, tense que a probabilidade pedida é $6\cdot\frac{1}{6^3}=\frac{1}{6^2}=\frac{1}{36}=0.02\widehat{7}$.

152. Un segmento está dividido en tres partes iguais. Sobre este segmento marcáronse ao chou 3 puntos. Calcula a probabilidade de que en cada unha das partes do segmento caia un punto. Suponse que a probabilidade de que un punto caia nun segmento é proporcional á lonxitude do segmento e non depende da súa posición.

Solución:

Dado que a lonxitude de cada parte é a terceira parte do segmento total, a probabilidade de que un punto caia nese segmento é $\frac{1}{3}$, para cada segmento. Así, a probabilidade de que cada punto caia nunha das partes do segmento é $\left(\frac{1}{3}\right)^3$, e como podemos permutar os puntos nas partes do segmento resulta que a probabilidade pedida é $p=3!\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3$.

153. A probabilidade de que un tirador faga branco é igual a 0.8. Cantos disparos debe efectuar o tirador para que cunha probabilidade menor que 0.4 se poda esperar que non haberá nin un só tiro fallado?

Solución:

Sexan as seguintes denominacións dos sucesos:

A: non falla en ningún disparo.

A_i: non falla no disparo i–ésimo $(i=1,2,\ldots,n)$.

O suceso que nos interesa é $A=A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n$.

A probabilidade de que en calquera dos disparos non falle é de $0.8\rightarrow p(A_i)=0.8$. Dado que os A_i son independentes, a probabilidade pedida é:

$$p(A)=p(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=p(A_1)\cdot p(A_2)\cdot\ldots\cdot p(A_n)=0.8\cdot 0.8\cdot\ldots\cdot 0.8=0.8^n.$$

Dado que buscamos que $0.8^n<0.4\rightarrow n\cdot\log(0.8)<\log(0.4)\rightarrow n>\frac{\log(0.4)}{\log(0.8)}=4.106\cdots$. Polo tanto, o número de disparos que debe efectuar é $n\geq 5$.

154. Para certa poboación o promedio de días nubrados en xullo é de 6. Calcula a probabilidade de que o un e o dous de xullo faga bo tempo.

Solución:

Se o promedio é de 6 días nubrados, haberá un promedio de 25 días bos en xullo. Sexan os sucesos A: o primeiro día está bo e B: o segundo día está bo.

Estase pedindo $p(A\cap B)=p(A)\cdot p_A(B)=\frac{25}{31}\cdot\frac{24}{30}=\frac{20}{31}$.

155. Nunha biblioteca hai 6 manuais de teoría de probabilidades, 3 dos cales están encadernados en tela. A persoa encargada da biblioteca colle ao chou 2 manuais. Calcula a probabilidade de que os dous manuais resulten encadernados en tela.

Solución:

Sexan os sucesos A: o primeiro manual escollido ten encadernación en tela e B: o segundo manual escollido ten encadernación en tela.

A probabilidade de que o primeiro manual teña encadernación en tela é igual a:

$$p(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

A probabilidade de que o segundo manual teña encadernación en tela, condicionado a que o primeiro manual teña encadernación en tela é:

$$p(B/A)=\frac{2}{5}.$$

Polo teorema do produto das probabilidades de sucesos dependentes, a probabilidade buscada de que os dous manuais teñan a encadernación en tela é:

$$p(A\cap B)=p(A)\cdot p_A(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}=0.2.$$

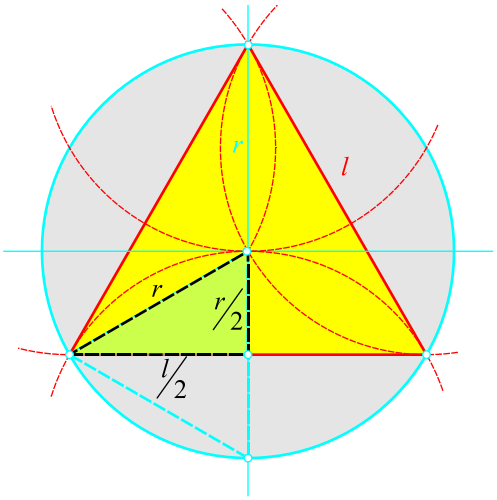
156. Nun círculo de radio r está inscrito un triángulo equilátero. Dentro do círculo márcanse ao chou 4 puntos. Supoñendo que a probabilidade de que un punto caia na figura é proporcional á superficie da mesma, calcula a probabilidade dos seguintes sucesos:

156.1. Os 4 puntos caen dentro do triángulo.

156.2. Un punto cae dentro do triángulo e un punto en cada segmento circular delimitado polos lados do triángulo.

Solución:

Sexa un círculo de radio r. Nel inscribimos un triángulo equilátero, como se ve na figura adxunta, utilizando figuras auxiliares punteadas.



Sexa l a medida do lado dese triángulo.

$r^2=\left(\frac{l}{2}\right)^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2\rightarrow\left(\frac{l}{2}\right)^2=r^2-\left(\frac{r}{2}\right)^2\rightarrow l=\sqrt{3}r$. A área do triángulo rectángulo inscrito é $S_\Delta=\frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$.

A área de cada *segmento circular* determinado polo lado dese triángulo é

$$S_i=\frac{\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)r^2}{12}.$$

156.1. A probabilidade de que caia un punto dentro do triángulo é $\frac{3\sqrt{3}r^2/4}{\pi r^2}=$

$=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$, polo que a probabilidade de que caian os catro puntos é $\left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^4$.

156.2. A probabilidade de que un punto caia nun segmento circular determinado polo lado do triángulo equilátero inscrito é

$\frac{\frac{\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)r^2}{12}}{\pi r^2}=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{12\pi}$. Polo tanto, a probabilidade de que caian tres puntos neses triángulos é $3!\cdot\left(\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{12\pi}\right)^3$, polo que a probabilidade pedida é $p=3!\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\cdot\left(\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{12\pi}\right)^3$.

157. Nunha caixa hai 10 pezas, entre as cales 6 están pintadas. Un montador extrae ao chou 4 pezas. Calcular a probabilidade de que todas as pezas extraídas sexan pintadas.

Solución:

Sexa A: a primeira peza está pintada, B: a segunda peza está pintada, C: a terceira peza está pintada e D: a cuarta peza está pintada. Pídese a probabilidade $p(A\cap B\cap C\cap D)$.

$$p(A\cap B\cap C\cap D)=p(A)\cdot p_A(B)\cdot p_{A\cap B}(C)\cdot p_{A\cap B\cap C}(D)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{1}{14}.$$

158. Nun taller traballan 7 homes e 3 mulleres. Polo número de ficha cóllense ao chou 3 persoas. Calcula a probabilidade que te todas as persoas escollidas sexan homes.

Solución:

Sexan os sucesos A: o primeiro escollido é home, B: o segundo escollido é home e C: o terceiro escollido é home.

— A probabilidade de que o primeiro escollido sexa home é $p(A)=\frac{7}{10}$.

— A probabilidade de que o segundo escollido sexa home, a condición de que o primeiro escollido xa fose un home, é dicir, a probabilidade condicional do suceso B é $p_A(B)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

— A probabilidade de que o terceiro escollido sexa un home, coa condición de que xa se escolleron dous homes, é dicir, a probabilidade condicionadas do suceso C é $p_{AB}(C)=\frac{5}{8}$.

A probabilidade buscada é $p(A\cap B\cap C)=p(A)\cdot p_A(B)\cdot p_{AB}(C)=\frac{7}{10}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{7}{24}$.

159. De entre as 25 preguntas do programa un estudante sabe 20. Calcula a probabilidade de que o estudante conteste as tres preguntas dadas polo examinador.

Solución:

Sexa A: sabe a primeira pregunta, B: sabe a segunda pregunta e C: sabe a terceira pregunta. A probabilidade pedida é $p(A\cap B\cap C)$.

$$p(A\cap B\cap C)=p(A)\cdot p_A(B)\cdot p_{A\cap B}(C)=\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{18}{23}=\frac{57}{115}.$$

160. Nunha furna hai 5 bolas numeradas dende o 1 ata o 5. Dunha en unha extráense ao chou 3 bolas sen repoñelas. Calcula a probabilidade dos seguintes sucesos:

160.1. Aparecen sucesivamente as bolas cos números 1, 4 5.

160.2. As bolas extraídas teñen os números 1, 4, 5 independentemente do orden con que aparecen.

Solución:

160.1. Sexa A: a primeira bola está numerada con 1, B: a segunda bola ten o número 4 e C: a terceira bola ten o número 5. Pídese a probabilidade $p(A\cap B\cap C)$.

$$p(A\cap B\cap C)=p(A)\cdot p_A(B)\cdot p_{A\cap B}(C)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{60}.$$

160.2. Poden collerse 3 bolas de entre as 5 bolas numeradas de V_5^3 maneiras distintas, e poden collerse as que teñen os números 1, 4 e 5 de $P_3=3!$ maneiras distintas. Polo tanto, a probabilidade pedida é:

$$p=\frac{P_3}{V_5^3}=\frac{3!}{5\cdot 4\cdot 3}=\frac{1}{10}.$$

161. Calcula a probabilidade $p(A)$ dadas as probabilidades $p(A\cap B)=0.72$ e $p(A\cap\overline{B})=0.18$.

Solución:

O suceso A pode representarse en forma de unión dos dous sucesos mutuamente excluíntes seguintes:

$$A=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$$

Polo teorema da adición de probabilidades de sucesos mutuamente excluíntes tense:

$$p(A)=p\left[(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\right]=p(A\cap B)+p(A\cap\overline{B})=0.72+0.18=0.90.$$

162. Nunha bolsa hai 10 bolas idénticas numeradas dende o 1 ata o 10. Extráense ao chou, de unha en unha, 3 bolas. Calcula a probabilidade de que aparezan sucesivamente as bolas con números 1, 2 e 3, se as bolas se extraen:

162.1. Sen reposición.

162.2. Con reposición.

Solución:

Sexa A: a primeira bola ten o número 1, B: a segunda bola ten o número 2 e C: a terceira bola ten o número 3.

Pídese calcular $p(A\cap B\cap C)$.

162.1. $p(A\cap B\cap C)=p(A)\cdot p_A(B)\cdot p_{A\cap B10}(C)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{720}$.

162.2. Neste caso, os sucesos A, B e C son independentes, e polo tanto:

$$p(A\cap B\cap C)=p(A)\cdot p(B)\cdot p(C)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{1000}=0.001.$$

4.9. Probabilidade de que apareza, como pouco, un suceso

Este tipo de problemas xa foi tratado nos exemplos 133 e 134, entre outros, só que sen formalizar o seu tratamento.

Supoñamos que os sucesos A_1, A_2, …, A_n son independentes dentro do espazo mostral; ademais $p(A_1)=p_1$, $p(A_2)=p_2$, …, $p(A_n)=p_n$. Supoñamos que como resultado dos experimentos poden ocorrer todos os sucesos, ou ben parte deles, ou non ocorre ningún deles.

A probabilidade de que ocorra o suceso A, consistente en que ocorra, polo menos, un dos sucesos A_1, A_2, …, A_n, independentes no seu espazo mostral, é igual á diferenza entre a unidade e o produto das probabilidades dos sucesos $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, …, $\overline{A_n}$:

$$p(A)=1-q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_n$$

sendo $p(\overline{A_1})=q_1=1-p_1$, $p(\overline{A_2})=q_2=1-p_2$. …, $p(\overline{A_n})=q_n=1-p_n$.

— En particular, se os n sucesos teñen idéntica probabilidade p, a probabilidade de que apareza polo menos un dos sucesos A_1, A_2, …, A_n é igual a $p(A)=1-q^n$, con $q=1-p$.

163. Nun circuíto eléctrico conéctanse en serie 3 elementos que traballan independentemente un do outro. As probabilidade de fallo do primeiro, segundo e terceiro elementos son respectivamente iguais a $p_1=0.1$, $p_2=0.15$ e $p_3=0.2$. Calcula a probabilidade de que non haxa corrente no circuíto.

Solución:

Posto que os elementos están conectados en serie, non haberá corrente (suceso A) se falla algún (aínda que sexa un só) dos elementos. A probabilidade buscada é:

$$p(A)=1-q_1\cdot q_2\cdot q_3=1-(1-0.1)(1-0.15)(1-0.2)=0.388.$$

164. Un dispositivos ten 2 elementos que traballan independentemente. As probabilidades de fallo dos elementos son respectivamente iguais a 0.05 e 0.08. Calcula a probabilidade de fallo do dispositivo, se para que falle é suficiente que falle polo menos un dos elementos.

Solución:

Sexa A: o dispositivo falla. A probabilidade pedida é:

$$p(A)=1-q_1\cdot q_2=1-(1-0.05)(1-0.08)=0.126.$$

165. Durante o conflito nos Balcáns comprobouse que para a destrución dunha ponte durante un bombardeo era suficiente que fora alcanzada por unha bomba. Calcular a probabilidade de que unha ponte sexa destruída se se lanzan sobre ela 4 bombas con probabilidades de impacto respectivamente iguais a 0.3, 0.4, 0.6 e 0.7.

Solución:

Sexa A: a ponte é destruída durante o bombardeo. A probabilidade pedida é:

$$p(A)=1-q_1\cdot q_2\cdot q_3\cdot q_4=1-(1-0.3)(1-0.4)(1-0.6)(1-0.7)=0.9496\approx 0.95.$$

166. A probabilidade do intento de éxito de cumprir un exercicio para cada un dos dous deportistas é igual a 0.5. Os deportistas realizan o exercicio alternativamente; ademais, cada un fai dous intentos. O primeiro que cumpre o exercicio recibe un premio. Calcula a probabilidade de obtención de premio polos deportistas.

Solución:

Para que un premio sexa outorgado é suficiente que polo menos un dos catro intentos sexa exitoso. A probabilidade do intento exitoso é $p=0.5$; a probabilidade do intento frustrado é, consecuentemente, $q=1-p=1-0.5=0.5$. Polo tanto, a probabilidade buscada é:

$$p=1-q^4=1-0.5^4=0.9375\approx 0.94.$$

167. Tres investigadores, independentemente un do outro, miden certa magnitude física. A probabilidade de que o primeiro investigador cometa un erro na lectura do aparato é igual a 0.1. Para o segundo e terceiro investigadores esa probabilidade é, respectivamente, igual a 0.15 e 0.2. Calcula a probabilidade de que nunha única medición polo menos un dos investigadores cometa un erro.

Solución:

Sexa A: ao menos un dos investigadores comete un erro de medición. A probabilidade buscada é:

$$p(A)=1-q_1\cdot q_2\cdot q_3=1-(1-0.1)(1-0.15)(1-0.2)=0.388.$$

168. Un enxeñeiro fai numerosas medicións de certa magnitude física. A probabilidade de que ao ler o instrumento de medida cometa un erro é igual a p. Calcula o menor número de medicións que debe facer o enxeñeiro para que coa probabilidade $p>\alpha$ se poda esperar que, polo menos, un dos resultados das medicións é falso.

Solución:

A probabilidade de polo menos un erro nas medicións (suceso A) é igual a $p(A)=1-q^n$, onde $q=1-p$ é a probabilidade de fallo. Quérese que:

$$p(A)>\alpha\rightarrow 1-q^n>\alpha\rightarrow 1-(1-p)^n>\alpha\rightarrow 1-\alpha>(1-p)^n.$$

Tomando logaritmos tense que:

$$1-\alpha>(1-p)^n\rightarrow\log(1-\alpha)>n\cdot\log(1-p)\xrightarrow{\log(1-p)<0}n>\frac{\log(1-\alpha)}{\log(1-p)}.$$

Como o número de medicións é un número natural, o enxeñeiro deberá efectuar as medicións:

$$N=E\left[\frac{\log(1-\alpha)}{\log(1-p)}\right]+1$$

Onde $E[k]$ representa a función parte enteira de k.

169. A probabilidade de impacto nun branco por cada un dos dous tiradores é igual a 0.3. Os tiradores disparan alternativamente; ademais, cada un debe facer dous disparos O primeiro en facer branco obtén un premio. Calcula a probabilidade de que os tiradores obteñan o premio.

Solución:

Para que un premio sexa outorgado é suficiente que polo menos un dos catro intentos sexa exitoso. A probabilidade do intento exitoso é $p=0.3$; a probabilidade do intento frustrado é, consecuentemente, $q=1-p=1-0.3=0.7$. Polo tanto, a probabilidade buscada é:

$$p=1-q^4=1-0.7^4=0.7599\approx 0.76.$$

170. A probabilidade de polo menos un impacto no branco para tres disparos dun tirador é igual a 0.875. Calcula a probabilidade de impacto nun disparo.

Solución:

A probabilidade de polo menos un impacto no branco (suceso A) é igual a $p(A)=1-q^3$, onde q é a probabilidade de tiro fallado. Dos datos do problema tense que $p(A)=0.875$. Así:

$$0.875=1-q^3\rightarrow q^3=1-0.875=0.125\rightarrow q=\sqrt[3]{0.125}=0.5.$$

Polo tanto, a probabilidade buscada é:

$$p=1-q=1-0.5=0.5.$$

171. A probabilidade dun impacto polo menos no branco en catro disparos é 0.9984. Calcula a probabilidade de facer branco nun só disparo.

Solución:

A probabilidade de polo menos un impacto no branco (suceso A) é igual a $p(A)=1-q^4$, onde q é a probabilidade de tiro fallado. Dos datos do problema tense que $p(A)=0.9984$. Así:

$0.9984=1-q^4 \rightarrow q^4=1-0.9984=0.0016 \rightarrow q=\sqrt[4]{0.0016}=0.2$.

Polo tanto, a probabilidade buscada é:

$p=1-q=1-0.2=0.8$.

4.9.4. Teorema da probabilidade total

Como xa vimos, A_1, A_2, …, A_n é un *sistema completo de sucesos* cando verifica que

- $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n = E$.
- A_1, A_2, A_3, …, A_n son incompatibles dous a dous.

Teorema 15. Sexa A_1, A_2, …, A_n un sistema completo de sucesos tal que a probabilidade de cada un deles é distinta de cero.

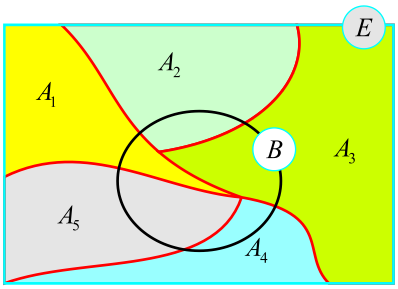
Sexa B un suceso calquera, para os que se coñecen as probabilidades $p(B/A_i)$.

Entón a *probabilidade do suceso* B obtense mediante a seguinte expresión:

$$p(B)=p(A_1)\cdot p(B/A_1)+p(A_2)\cdot p(B/A_2)+\cdots+p(A_n)\cdot p(B/A_n)$$

Ou tamén:

$$p(B)=\sum_{i=1}^{n} p(A_i)\cdot p(B/A_i) \equiv \sum_{i=1}^{n} p(A_i)\cdot p_{A_i}(B)$$



172. Sábese que a probabilidade de sufrir un accidente nun determinado recorrido nun día chuvioso é 0.09 e en día soleado a probabilidade de accidente é 0.005. Durante un período de 10 días 7 foron secos e tres mollados. Cal é a probabilidade de que se produza un accidente?

Solución:

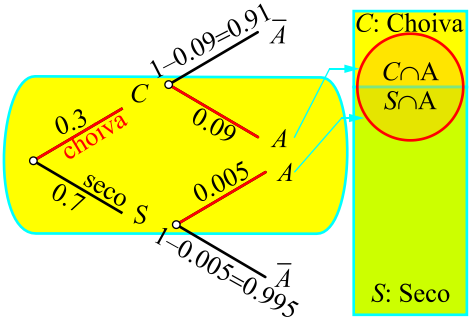
Á vista do diagrama adxunto dedúcese:

$$p(\text{ter accidente})=p\begin{pmatrix}\text{accidente}\\ \text{choiva}\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}\text{accidente}\\ \text{soleado}\end{pmatrix}=$$

$$=0.3\cdot 0.09+0.7\cdot 0.005=0.0305.$$

Que quere dicir que:

$$p(A)=p(C)\cdot p_C(A)+p(S)\cdot p_S(A).$$



173. Unha empresa dedicada á promoción de vivendas ten a súa zona de traballo en tres grandes concellos de A Coruña C_1, C_2 e C_3. Vende no concello C_1 o 60% das vivendas, no concello C_2 o 30% e no concello C_3 o 10% das vivendas que constrúe. De experiencias anteriores, tanto desta empresa como de outras, sábese que un determinado número de familias non efectúan o pago das letras mensuais que previamente habían aceptado, sendo esa porcentaxe do 2%, 4% e 6%, respectivamente. Determina a probabilidade que unha familia calquera pague as súas letras.

Solución:

Sexan os sucesos B: a familia paga as letras; C_1: a familia é do concello C_1; C_2: a familia é do concello C_2 e C_3: a familia é do concello C_3.

Do enunciado dedúcese que:

$p(C_1)=0.6$, $p(C_2)=0.3$ e $p(C_3)=0.1$. $p_{C_1}(\overline{B})=0.02$, $p_{C_2}(\overline{B})=0.04$ e $p_{C_3}(\overline{B})=0.06$.

Dos anteriores datos dedúcese que:

$p_{C_1}(B)=0.98$, $p_{C_2}(B)=0.96$ e $p_{C_3}(B)=0.94$.

Aplicando o teorema da probabilidade total tense:

$$\boxed{p(B)=\sum_{i=1}^{3} p(C_i)\cdot p_{C_i}(B)=p(C_1)\cdot p_{C_1}(B)+p(C_2)\cdot p_{C_2}(B)+p(C_3)\cdot p_{C_3}(B)=0.6\cdot 0.98+0.3\cdot 0.96+0.1\cdot 0.94=0.97.}$$

174. Nunha furna que contén dúas bolas bótase unha bola branca, e despois extraese da furna, ao chou, unha bola. Calcula a probabilidade de que a bola extraída resulta a branca, se son igualmente probables todas as suposicións posibles sobre a composición inicial das bolas (por cor).

Solución:

Sexa B : sacouse a bola branca. Son posibles as seguintes suposicións sobre a composición inicial das bolas da furna: A_1 : 0 bolas brancas, A_2 : 1 bola branca; A_3 : 2 bolas brancas.

Dado que en total existen tres hipóteses, e que segundo os datos, son equiprobabeis, a suma das probabilidades das hipóteses é igual á unidade (dado que forman un grupo completo de sucesos), a probabilidade de cada unha das hipóteses é igual a $1/3$:

$$p(A_1)=p(A_2)=p(A_3)=1/3$$

— A probabilidade condicional de que sexa extraída a bola branca, coa condición de que inicialmente non había na furna bolas brancas, é:

$$p_{A_1}(B)=p(B/A_1)=1/3$$

— A probabilidade condicionada de que sexa extraída a bola branca, coa condición de que inicialmente había na furna unha bola branca, é:

$$p_{A_2}(B)=p(B/A_2)=2/3$$

— A probabilidade condicionada de que sexa extraída a bola branca, coa condición de que inicialmente había na furna dúas bolas brancas, é:

$$p_{A_3}(B)=p(B/A_3)=3/3=1$$

A probabilidade buscada de que sexa extraía unha bola branca, pola fórmula das probabilidades totais é igual a:

$$p(B)=p(A_1)\cdot p(B/A_1)+p(A_2)\cdot p(B/A_2)+p(A_3)\cdot p(B/A_3)=p(A_1)\cdot p_{A_1}(B)+p(A_2)\cdot p_{A_2}(B)+p(A_3)\cdot p_{A_3}(B)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}.$$

175. Nunha clase hai 6 calculadoras gráficas e 4 científicas. A probabilidade de que durante unha semana a calculadora gráfica acabe as pilas é de 0.95; para a calculadora científica esa probabilidade é igual a 0.8. Un estudante colle, para a semana, unha calculadora ao chou. Calcula a probabilidade de que ata o remate da semana a calculadora se quede sen pilas.

Solución:

Sexa A : a calculadora quédase sen pilas, B : colle unha calculadora gráfica e C : colle unha calculadora científica.

$$p(B)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5},\ p(C)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}.$$

Polo teorema das probabilidades totais tense:

$$p(A)=p(B)\cdot p_B(A)+p(C)\cdot p_C(A)=\frac{3}{5}\cdot 0.95+\frac{2}{5}\cdot 08=0.89.$$

176. Nunha caixa hai 12 pezas da fábrica número 1, 20 pezas da fábrica número 2 e 18 pezas da fábrica número 3. A probabilidade de que a peza da fábrica número 1 sexa de calidade excelente é igual a 0.9. Para as pezas da fábrica número 2 e número 3 estas probabilidades son, respectivamente, 0.6 e 0.9. Calcula a probabilidade de que unha peza extraída ao chou sexa de calidade excelente.

Solución:

Sexa B : a peza extraía é excelente e sexa F_i : a peza procede da fábrica i , $i=1,2,3$.

En total hai 50 pezas.

Dos datos do enunciado tense que:

$$p(F_1)=\frac{12}{50},\ p(F_2)=\frac{20}{50}\ \text{e}\ p(F_3)=\frac{18}{50}.$$

Polo teorema das probabilidades totais tense que a probabilidade pedida é:

$$p(B)=p(F_2)\cdot p(B/F_1)+p(F_2)\cdot p(B/F_2)+p(F_3)\cdot p(B/F_3)=\frac{12}{50}\cdot 0.9+\frac{20}{50}\cdot 0.6+\frac{18}{50}\cdot 0.9=0.78.$$

177. Nunha furna que contén n bolas bótase unha bola branca, despois do cal se extrae unha bola. Calcula a probabilidade de que a bola extraída sexa branca, se son igualmente probables todas as suposicións posibles sobre a composición inicial das bolas (por cor).

Solución:

Sexa B: sacouse a bola branca. Son posibles as seguintes suposicións sobre a composición inicial das bolas da furna: A_i: na furna hai $i-1$ bolas brancas, $i=1,2,\ldots,n+1$.

Dado que son equiprobabeis todas as suposicións acerca das cores das bolas que había na furna, resulta que $p(A_i)=\dfrac{1}{n+1}$.

Así tense que $p_{A_i}(B)=p(B/A_i)=\dfrac{i}{n+1}$.

Polo teorema das probabilidades totais é:

$$p(A)=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{i}{n+1}=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{i}{(n+1)^2}=\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n+1}i.$$

$\sum_{i=1}^{n+1}i$ é a suma de $n+1$ termos dunha progresión aritmética, na que $a_1=1$ e $a_n=n+1\rightarrow$

$$\rightarrow\sum_{i=1}^{n+1}i=\frac{1+(n+1)}{2}(n+1)=\frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

Así resulta:

$$p(B)=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{i}{n+1}=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{i}{(n+1)^2}=\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{i=1}^{n+1}i=\frac{(n+2)(n+1)}{2(n+1)^2}=\frac{n+2}{2(n+1)}.$$

178. Nunha pila colocáronse 5 carabinas, 3 das cales están equipadas dun visor óptico. A probabilidade de que un tirador faga branco ao usar unha carabina con visor óptico é do 0.95; para carabina sen visor esta probabilidade é 0.7. Calcula a probabilidade de que faga branco un tirador que dispara unha única vez cunha carabina escollida ao azar.

Solución:

Sexa A: fai branco no disparo, B: colle unha carabina con visor óptico e C: colle unha carabina sen visor óptico.

$$p(B)=\frac{3}{5},\ p(C)=\frac{2}{5}.$$

Polo teorema das probabilidades totais tense que a probabilidade pedida é:

$$p(A)=p(B)\cdot p_B(A)+p(C)\cdot p_C(A)=\frac{3}{5}\cdot 0\cdot 95+\frac{2}{5}\cdot 0.7=0.85.$$

179. Cada unha das tres furnas contén 6 bolas negras e 4 brancas. Da primeira furna sácase ao chou unha bola e bótase na segunda furna, despois do cal da segunda furna escóllese unha bola e traspásase á terceira furna. Calcula a probabilidade de que unha bola tomada ao azar da terceira furna sexa branca.

Solución:

Sexan B_i: sae branca na i–ésima furna, N_i: sae negra na i–ésima furna. Interésanos $p(B_3)$.

$$p(B_1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5},\ p(N_1)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

Cando se pasa unha bola á segunda furna, haberá nela 11 bolas, podendo haber 5 ou 4 brancas, segundo se pasara da primeira unha branca ou unha negra. Polo tanto:

$$p(B_2)=p(B_1)\cdot p_{B_1}(B_2)+p(N_1)\cdot p_{N_1}(B_2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{11}+\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{11}=\frac{2}{5}.$$

$$p(N_2)=p(N_1)\cdot p_{N_1}(N_2)+p(B_1)\cdot p_{B_1}(N_2)=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{11}+\frac{2}{5}\cdot\frac{6}{11}=\frac{3}{5}.$$

Cando se pasa unha bola á terceira furna, haberá nela 11 bolas, podendo haber 5 ou 4 brancas, segundo se pasara da segunda unha branca ou unha negra. Polo tanto:

$$p(B_3)=p(B_2)\cdot p_{B_2}(B_3)+p(N_2)\cdot p_{N_2}(B_3)=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{11}+\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{11}=\frac{2}{5}=0.4.$$

180. A primeira furna contén 10 bolas, 8 das cales son brancas; a segunda furna contén 20 bolas, 4 das cales son brancas. Da cada furna sácase ao chou unha bola; destas dúas bolas escóllese ao chou unha delas. Calcula a probabilidade de que se collera unha bola branca.

Solución:

Sexa A: a última bola collida é branca, F_1: a bola procede da primeira furna, F_2: a bola procede da segunda furna.

Polo teorema das probabilidades totais tense que a probabilidade pedida é:

$$p(A)=p(F_1)\cdot p(A/F_1)+p(F_2)\cdot p(A/F_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{20}=\frac{1}{2}=0.5\,.$$

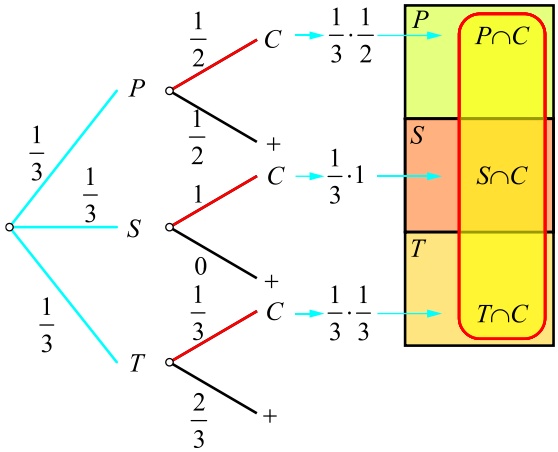
181. Unha caixa ten tres moedas: P, S, T. A primeira é normal, a segunda ten cara polos dous lados e a terceira está trucada, de forma que a probabilidade de sacar cara é $\frac{1}{3}$.

Elíxese unha moeda ao chou e tírase ao ar. Calcula a probabilidade de obter cara.

Solución:

Construíndo un diagrama de árbore resulta fácil achar a probabilidade pedida:

$$p(C)=p(P\cap C)+p(S\cap C)+p(T\cap C)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{11}{18}\,.$$



182. Sácanse dúas cartas dun mazo ben barallado de 52 cartas. Calcula a probabilidade de que as dúas cartas sexan ases:

182.1. Se hai reemprazo.

182.2. Sen reemprazo.

Solución:

Facémolo de dúas maneiras:

I. Sexa $A_1=\{\text{as na primeira retirada}\}$, $A_2=\{\text{as na segunda retirada}\}$. Así estamos buscando $p(A_1\cap A_2)=p(A_1)\cdot p_{A_1}(A_2)$.

182.1. Dado que para a primeira retirada hai 4 ases e 51 cartas, $p(A_1)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$. Ademais, se se reempraza a carta antes de facer a segunda retirada entón $p_{A_1}(A_2)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$, dado que tamén hai 4 ases nas 52 cartas. Entón:

$$p(A_1\cap A_2)=p(A_1)\cdot p_{A_1}(A_2)=\frac{4}{52}\cdot\frac{4}{52}=\frac{1}{169}$$

182.2. Como na parte 182.1), $p(A_1)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$ pero neste caso $p_{A_1}(A_2)=\frac{3}{51}$, dado que se sae un as na primeira retirada quedarían só 3 ases e 51 cartas. Entón:

$$p(A_1\cap A_2)=p(A_1)\cdot p_{A_1}(A_2)=\frac{4}{52}\cdot\frac{3}{51}=\frac{1}{221}$$

II. 182.1. A primeira carta pode sacarse de calquera das 52 maneiras, e dado que hai reemprazo, a segunda carta tamén se pode sacar de calquera das 52 maneiras. Entón, as dúas cartas poden sacarse de $52\cdot 52=2704$ maneiras, todas igualmente probables.

Hai 4 maneiras de escoller un as na primeira retirada, e 4 na segunda, polo que o número de maneiras de escoller ases na primeira e segunda retirada son $4\cdot 4=16$. A probabilidade pedida é:

$$\frac{16}{2704}=\frac{1}{169}$$

182.2. A primeira carta pode retirarse en calquera das 52 maneiras, e dado que non hai reemprazo, a segunda carta pode retirarse de 51 maneiras. Entón as dúas cartas poden retirarse de en $52\cdot 51=2652$ maneiras distintas.

Aquí hai 4 maneiras de escoller un as na primeira retirada e 3 maneiras distintas na segunda retirada, polo que o número de maneiras de coller dous ases nas dúas retiradas é de $4\cdot 3=12$, co que a probabilidade pedida é:

$$\frac{12}{2652}=\frac{1}{221}$$

183. As probabilidades de que durante o funcionamento dun calculador se interrompa o órgano aritmético, a memoria operatriz ou os demais dispositivos gardan a relación $3:2:5$. As probabilidades de descubrir unha intermitencia no órgano aritmético, na memoria operatriz ou nos demais dispositivos son, respectivamente, iguais a 0.8, 0.9 e 0.9. Calcula a probabilidade de que unha intermitencia no calculador sexa descuberta.

Solución:

Sexa B: descúbrese unha intermitencia no calculador.

Considérense os seguintes sucesos:

A_1: a interrupción está no órgano aritmético, A_2: a interrupción está na memoria operatriz e A_3: a interrupción prodúcena os demais dispositivos.

As probabilidades destes sucesos obtéñense da relación $3:2:5$ e así resulta que:

$$p(A_1)=\frac{3}{10},\ p(A_2)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}\ \text{ e }\ p(A_3)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$$

As probabilidades condicionadas de descubrir unha intermitencia no calculador, segundo as interrupcións procedan de A_1, A_2 ou A_3 son:

$$p_{A_1}(B)=0.8,\ p_{A_2}(B)=0.9,\ p_{A_3}(B)=0.9.$$

Polo teorema da probabilidade total, tense:

$$p(B)=p(A_1)\cdot p_{A_1}(B)+p(A_2)\cdot p_{A_2}(B)+p(A_3)\cdot p_{A_3}(B)=\frac{3}{10}\cdot 0.8+\frac{1}{5}\cdot 0.9+\frac{1}{2}\cdot 0.9=0.87.$$

4.9.5. Probabilidade "*a posteriori*": Teorema de Bayes

O teorema de Bayes é, dalgunha maneira, o complemento do teorema da probabilidade total:

Sexa A_1, A_2, …, A_n un sistema completo de sucesos tal que a probabilidade de cada un deles é distinta de cero, e sexa B un suceso calquera, para os que se coñecen as probabilidades $p(B/A_i)\equiv p_{A_i}(B)$. Polo teorema da probabilidade total tense que:

$$p(B)=p(A_1)\cdot p(B/A_1)+p(A_2)\cdot p(B/A_2)+\cdots+p(A_n)\cdot p(B/A_n)$$

Teorema 16. O *teorema de Bayes* establece que as probabilidades $p(A_i/B)\equiv p_B(A_i)$ ven dada pola expresión:

$$p(A_i/B)=\frac{p(A_i)\cdot p(B/A_i)}{p(A_1)\cdot p(B/A_1)+p(A_2)\cdot p(B/A_2)+\cdots+p(A_n)\cdot p(B/A_n)}$$

$$p(A_i/B)=\frac{p(A_i)\cdot p(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n}p(A_i)\cdot p(B/A_i)}\equiv p_A(A_i)=\frac{p(A_i)\cdot p_{A_i}(B)}{\sum_{i=1}^{n}p(A_i)\cdot p_{A_i}(B)}\equiv p_B(A_i)=\frac{p(A_i)\cdot p_{A_i}(B)}{p(B)}$$

- As probabilidades $p(A_i)$ chámanse *probabilidades a priori*.
- As probabilidades $p(B/A_i)\equiv p_{A_i}(B)$ chámanse *verosimilitudes*.
- As probabilidades $p(A_i/B)\equiv p_B(A_i)$ chámanse *probabilidades a posteriori* ou *hipóteses*.

Teorema 17. Supóñase que o suceso B pode ocorrer a condición de que apareza un só dos sucesos mutuamente excluíntes A_1, A_2, …, A_n, que forma un grupo completo de sucesos. Despois de ocorrer o suceso B estímanse novamente as probabilidades *a posteriori* (probabilidades das hipóteses), é dicir, calcúlanse as probabilidades condicionais $p_B(A_i)$, $i=1,2,\ldots,n$. Entón verifícase que:

$$\sum_{i=1}^{n}p_B(A_i)=1$$

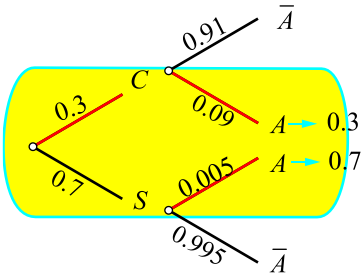
184. Sábese que a probabilidade de sufrir un accidente nun determinado recorrido nun día chuvioso é 0.09 e en día soleado a probabilidade de accidente é 0.005. Durante un período de 10 días 7 foron secos e tres mollados. Sabendo que nun deses días se produciu un accidente, pídese:

184.1. Calcular a probabilidade de que fora un día chuvioso.

184.2. Calcular a probabilidade de que fora un día soleado.

Solución:

$$p(\text{accidente}) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)\cdot p(B/A_i) =$$
$$= 0.3\cdot 0.09 + 0.7\cdot 0.005 = 0.0305.$$



$A \rightarrow 0.3\cdot 0.09 = p(C)p(A/N)$

$A \rightarrow 0.7\cdot 0.005 = p(S)p(A/S)$

184.1. $p(\text{choiva/accidente}) = \dfrac{p(\text{accidente con choiva})}{p(\text{accidente})} =$

$= \dfrac{0.3\cdot 0.09}{0.0305} = 0.885$.

184.2. $p(\text{soleado/accidente}) = \dfrac{p(\text{accidente en día soleado})}{p(\text{accidente})} = \dfrac{0.7\cdot 0.005}{0.0305} = 0.115$.

185. Dúas máquinas automáticas producen pezas idénticas que son tiradas nunha cinta transportadora común. O rendemento da primeira máquina é dúas veces maior co da segunda. A primeira máquina produce un promedio de 60% de pezas de calidade excelente, e a segunda, 84%. A peza tomada ao chou resultou ser de calidade excelente. Calcula a probabilidade de que fora producida pola primeira máquina automática.

Solución:

Sexa o suceso B: a peza é de calidade excelente.

Poden facerse dúas hipóteses:

A_1: a peza foi producida pola primeira máquina, e ademais $p(A_1) = \dfrac{2}{3}$ (a primeira máquina produce o dobre de pezas ca segunda).

A_2: a peza foi producida pola segunda máquina, e ademais $p(A_2) = \dfrac{1}{3}$.

A probabilidade condicional de que a peza sexa de calidade excelente, se foi producida pola primeira máquina é $p_{A_1}(B) = 0.6$.

A probabilidade condicional de que a peza sexa de calidade excelente se foi feita pola segunda máquina é $p_{A_2}(B) = 0.84$.

A probabilidade de que a peza tomada ao azar resulte de calidade excelente, pola fórmula da probabilidades totais, é igual a

$$p(B) = p(A_1)\cdot p_{A_1}(B) + p(A_2)\cdot p_{A_2}(B) = \frac{2}{3}\cdot 0.6 + \frac{1}{3}\cdot 0.84 = 0.68.$$

A probabilidade buscada de que se escolleu unha peza excelente producida pola primeira máquina, pola fórmula de Bayes é:

$$p_B(A_1) = \frac{p(A_1)\cdot p_{A_1}(B)}{p(B)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot 0.6}{0.68} = \frac{10}{17} = 0.588.$$

186. Nun instituto a altura do 4% dos alumnos (H) e do 1% das alumnas (M) é superior a 183 cm. Ademais o 60% dos estudantes son mulleres. Supoñamos que a altura dun estudante seleccionado aleatoriamente é superior a 183 cm. Calcula a probabilidade de que o estudante sexa muller.

Solución:

Sexa $A = \{\text{estudante de estatura superior a 183 cm}\}$. Búscase $p(M/A)$, probabilidade de que un estudante sexa muller, dado que ten unha estatura superior a 183 cm.

Pola fórmula de Bayes tense:

$$p(M/A) = \frac{p(M)\cdot p(A/M)}{p(M)\cdot p(A/M) + p(H)\cdot p(A/H)} = \frac{0.60\cdot 0.01}{0.60\cdot 0.01 + 0.40\cdot 0.04} = \frac{3}{11}.$$

187. Nun armeiro hai 10 carabinas, 4 das cales están equipadas de visor óptico. A probabilidade de que un tirador faga branco au disparar unha carabina con visor óptico é 0.95; para a carabina sen visor óptico a probabilidade é 0.8. Un tirador fixo branco cunha carabina collida ao chou. Que é o máis probable: o tirador utilizou unha carabina con visor óptico ou sen el?

Solución:

Sexan B: fai branco nun disparo, T_1: o tirador usa unha carabina con visor óptico e T_2 : o tirador utiliza unha carabina sen visor óptico.

$$p(T_1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5},\ p(T_2)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5},\ p_{T_1}(B)=0.95,\ p_{T_2}(B)=0.8.$$

Polo teorema da probabilidade total:

$$p(B)=p(T_1)\cdot p_{T_1}(B)+p(T_2)\cdot p_{T_2}(B)=\frac{2}{5}\cdot 0.95+\frac{3}{5}\cdot 0.8=0.86$$

Pola regra de Bayes:

$$p_B(T_1)=\frac{p(T_1)\cdot p_{T_1}(B)}{p(B)}=\frac{\frac{2}{5}\cdot 0.95}{0.86}=\frac{19}{43}=0.441860465116\approx 0.44.$$

$$p_B(T_2)=\frac{p(T_2)\cdot p_{T_2}(B)}{p(B)}=\frac{\frac{3}{5}\cdot 0.8}{0.86}=\frac{24}{43}=0.558139534884\approx 0.56$$

Polo tanto, o máis probable é que o disparo fora feito cunha carabina sen visor óptico.

188. O número de camións que pasan por unha estrada dun polígono industrial onde hai unha estación de servizo con respecto ao número doutros automóbiles garda unha relación $3:2$. A probabilidade de que recargue combustible un camión é igual a 0.1 e para o automóbil esta probabilidade é 0.2. Ao surtidor chega un vehículo a repostar. Calcula a probabilidade de que sexa un camión.

Solución:

Sexan R: o vehículo reposta, B_1: o vehículo que reposta é un camión e B_2: o vehículo que reposta é outro tipo de automóbil.

$$p(B_1)=\frac{3}{5},\ p(B_2)=\frac{2}{5}.$$

As probabilidades condicionadas son $p_{B_1}(R)=0.1$ e $p_{B_2}(R)=0.2$.

Polo teorema da probabilidade total:

$$p(R)=p(B_1)\cdot p_{B_1}(R)+p(B_2)\cdot p_{B_2}(R)=\frac{3}{5}\cdot 0.1+\frac{2}{5}\cdot 0.2=0.14.$$

Polo teorema de Bayes:

$$p_R(B_1)=\frac{p(B_1)\cdot p_{B_1}(R)}{p(R)}=\frac{\frac{3}{5}\cdot 0.1}{0.14}=\frac{3}{7}=0.428571.$$

189. Dúas persoas encárganse de coser camisas nun taller. A probabilidade de que a primeira persoa cometa un erro é 0.05; para a segunda esta probabilidade é 0.1. Ao verificar as camisas confeccionadas descubriuse unha mal cosida. Calcula a probabilidade de que cometera o erro a primeira persoa.

Solución:

Sexa M: a camisa está mal cosida, C_1: a camisa confeccionouna a primeira persoa e C_2: a camisa confeccionouna a segunda persoa.

Polo teorema da probabilidade total: $p(M)=p(C_1)\cdot p_{C_1}(M)+p(C_2)\cdot p_{C_2}(M)=\frac{1}{2}\cdot 0.05+\frac{1}{2}\cdot 0.1=0.075$.

Polo teorema de Bayes, a probabilidade pedida é:

$$p_M(C_1)=\frac{p(C_1)\cdot p_{C_1}(M)}{p(M)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 0.05}{0.075}=\frac{1}{3}.$$

190. Nun hospital especializado, considerando un promedio das persoas que ingresan, vese que un 50% dos enfermos teñen a afección K, 30% coa afección L e o 20% padece a afección M. A probabilidade de curación completa da afección K é igual a 0.7; para as enfermidades L e M estas probabilidades son 0.8 e 0.9, respectivamente. Un enfermo interno foi dado de alta completamente curado. Calcula a probabilidade de que este enfermo sufrira a enfermidade K.

Solución:

Sexan C: o enfermo sae curado, E_1: o enfermo padecía a enfermidade K, E_2: o enfermo padecía a enfermidade L e E_3: o enfermo padecía a enfermidade M.

$p(E_1)=0.5$, $p(E_2)=0.3$ e $p(E_3)=0.2$ e $p_{E_1}(C)=0.7$, $p_{E_2}(C)=0.8$ e $p_{E_3}(C)=0.9$.

Polo teorema da probabilidade total:

$$p(C)=p(E_1)+p_{E_1}(C)+p(E_2)\cdot p_{E_2}(C)+p(E_3)\cdot p_{E_3}(C)=0.5\cdot 0.7+0.3\cdot 0.8+0.2\cdot 0.9=0.77.$$

Polo teorema de Bayes:

$$p_C(E_1)=\frac{p(E_1)\cdot p_{E_1}(C)}{p(C)}=\frac{0.5\cdot 0.7}{0.77}=\frac{5}{11}=0.45.$$

191. Un de dous enxeñeiros verifica o estándar dun artigo. A probabilidade de que o artigo caia en mans do primeiro enxeñeiro é 0.55 e a probabilidade de que o verifique o segundo é 0.45. A probabilidade de que artigo estandarizado sexa recoñecido como tal polo primeiro enxeñeiro é igual a 0.9 e polo segundo, 0.98. Durante a verificación un artigo foi recoñecido como estandarizado. Calcula a probabilidade de que o artigo o examinara o segundo enxeñeiro.

Solución:

Sexan E: o artigo é recoñecido como estandarizado; A_1: o artigo revísao o primeiro enxeñeiro e A_2: o artigo revísao o segundo enxeñeiro.

Tense que $p(A_1)=0.55$, $p(A_2)=0.45$, $p(E/A_1)=0.9$ e $p(E/A_2)=0.98$.

Pola regra de Bayes, resulta:

$$p(E/A_2)=\frac{p(A_2)\cdot p(E/A_2)}{p(A_1)\cdot p(E/A_1)+p(A_2)\cdot p(E/A_2)}=\frac{0.45\cdot 0.98}{0.55\cdot 0.9+0.45\cdot 0.98}=0.471153\approx 0.47.$$

192. Hai tres partidas de pezas de 20 pezas en cada partida. O número de pezas estándar na primeira, segunda e terceira partidas é, respectivamente, igual a 20, 15 e 10. Dunha partida tomada ao chou escolleuse ao azar unha peza que resultou estándar. Despois de restituír esta peza á partida, desta mesma partida sacouse por segunda vez, ao chou, unha peza que tamén resultou estándar. Calcula a probabilidade de que as pezas se tomaran da terceira partida.

Solución:

Sexa B: en cada unha das dúas probas (coa restitución) foi extraída unha peza estándar. Poden facerse as seguintes hipóteses (suposicións):

A_1: as pezas tomáronse da primeira partida, A_2: as pezas tomáronse da segunda partida e A_3: as pezas tomáronse da terceira partida.

Posto que as pezas se tomaron dunha partida elixida ao chou, as probabilidades das hipóteses son idénticas:

$$p(A_1)=p(A_2)=p(A_3)=\frac{1}{3}.$$

Calculamos a probabilidade condicional $p_{A_1}(B)$, é dicir, a probabilidade de que sexan collidas da primeira partida dúas pezas estándares. Este suceso é certo dado que na primeira partida todas as pezas son estándar. Polo tanto, $p_{A_1}(B)=1$.

Calculamos a probabilidade condicional $p_{A_2}(B)$, é dicir, a probabilidade de que sexan collidas da segunda partida sucesivamente (con restitución) dúas pezas estándares. $p_{A_2}(B)=\frac{15}{20}\cdot\frac{15}{20}=\frac{9}{16}$

Calculamos a probabilidade condicional $p_{A_3}(B)$, é dicir, a probabilidade de que sexan collidas da terceira partida sucesivamente (con restitución) dúas pezas estándares. $p_{A_3}(B)=\frac{10}{20}\cdot\frac{10}{20}=\frac{1}{4}$

A probabilidade buscada de que as dúas pezas estándares escollidas se tomaran da terceira partida, pola fórmula de Bayes, é:

$$p_B(A_3)=\frac{p(A_3)\cdot p_{A_3}(B)}{p(A_1)\cdot p_{A_1}(B)+p(A_2)\cdot p_{A_2}(B)+p(A_3)\cdot p_{A_3}(B)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{16}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}=\frac{4}{29}.$$

193. O suceso B pode ocorrer a condición de que apareza un dos sucesos mutuamente excluíntes A_1, A_2 e A_3, que forman un grupo completo de sucesos. Despois de aparecer o suceso B estimáronse de novo as probabilidades das hipóteses, é dicir, calculáronse as probabilidades condicionais destas hipóteses, e obtívose:

$$p_B(A_1)=0.6\,,\ p_B(A_2)=0.3$$

Calcula a probabilidade condicional $p_B(A_3)$ da hipóteses A_3.

Solución:

Sábese que, nas condicións do problema, se verifica que $\sum_{i=1}^{n} p_B(A_i)=1$. É dicir:

$$p_B(A_1)+p_B(A_2)+p_B(A_3)=1 \rightarrow p_B(A_3)=1-\left(p_B(A_1)+p_B(A_2)\right)=1-(0.6+0.3)=0.1.$$

194. Cunha batería de tres canóns fíxose unha descarga e 2 proxectís deron no branco. Calcula a probabilidade de que o primeiro canón impactara no branco, se as probabilidades de acertar no branco do primeiro, segundo e terceiro canóns son, respectivamente, $p_1=0.4$, $p_2=0.3$ e $p_3=0.5$.

Solución:

Sexa o suceso D: dous canóns fixeron branco. Sexan as hipóteses (suposicións):

C_1: o primeiro canón fixo branco e C_2: o primeiro canón non fixo branco. Segundo os datos do problema, $p(C_1)=0.4$; en consecuencia (o suceso C_2 é o suceso oposto) $p(C_2)=1-0.4=0.6$.

Calculemos a probabilidade condicional $p_{C_1}(D)$, é dicir, a probabilidade de que dos dous proxectís que deron no branco un deles foi lanzado polo primeiro canón e, polo tanto, o segundo impacto debeuse ou ben o segundo canón (e neste caso o terceiro fallou) ou ben ao terceiro canón (e nese caso o segundo canón fallou). Estes dous sucesos son mutuamente excluíntes e por iso é aplicable o teorema da probabilidade total:

$$p_{C_1}(D)=p_2\cdot q_3+p_3\cdot q_2=0.3\cdot 0.5+0.5\cdot 0.7=0.5.$$

Calculamos a probabilidade condicional $p_{C_2}(D)$, é dicir, a probabilidade de que dous proxectís que deron no branco e o primeiro canón fallou o tiro. En outras palabras, encontramos a probabilidade de que o segundo e o terceiro canón fagan branco. Estes dous sucesos son independentes, e por iso é aplicable o teorema do produto.

$$p_{C_2}(D)=p_2\cdot p_3=0.3\cdot 0.5=0.15.$$

Pola fórmula de Bayes obtemos a probabilidade de que o primeiro canón fixera branco:

$$p_D(C_1)=\frac{p(C_1)\cdot p_{C_1}(D)}{p(C_1)\cdot p_{C_1}(D)+p(C_2)\cdot p_{C_2}(D)}=\frac{0.4\cdot 0.5}{0.4\cdot 0.5+0.6\cdot 0.15}=\frac{20}{29}=0.689655\approx 0.69.$$

195. Nunha cidade o 90% dos coches son brancos e o 10% son grises. A unha testemuña dun accidente, que ve correctamente o color dos coches o 90% das veces, pídeselle que identifique a cor do causante. A testemuña declara que era gris. Cal era a probabilidade de que realmente sexa gris?

Solución:

Sexa CB o suceso «*o coche é branco*» e CG o suceso «*o coche é gris*». Sexa TB o suceso «*a testemuña afirma que o coche é branco*» e TG o suceso «*a testemuña que afirma que o coche é gris*». Entón:

$$p(CG/TG)=\frac{p(TG/CG)\cdot p(CG)}{p(TG/CG)\cdot p(CG)+p(TG/CB)\cdot p(CB)}=\frac{0.9\cdot 0.1}{0.9\cdot 0.1+0.1\cdot 0.9}=\frac{1}{2}=0.5.$$

196. Tres tiradores fixeron unha descarga e dúas balas deron no branco. Calcula a probabilidade de que o terceiro tirador dera no branco, se as probabilidades de impacto do primeiro, segundo e terceiro tiradores son, respectivamente, $p_1=0.6$, $p_2=0.5$ e $p_3=0.4$.

Solución:

Sexa o suceso D: dous tiradores fixeron branco. Sexan as hipóteses (suposicións) seguintes:

T_1: o terceiro tirador fixo branco e T_2: o terceiro tirador non fixo branco. Segundo os datos do problema, $p(T_1)=0.4$; en consecuencia (o suceso T_2 é o suceso oposto) $p(T_2)=1-0.4=0.6$.

Calculemos a probabilidade condicional $p_{T_1}(D)$, é dicir, a probabilidade de que das dúas que deron no branco unha delas foi disparada polo terceiro tirador e, polo tanto, o segundo impacto debeuse ou ben o primeiro tirador (e neste caso fallou o segundo) ou ben ao segundo tirador (e nese caso fallou o primeiro tirador). Estes dous sucesos son mutuamente excluíntes e por iso é aplicable o teorema da probabilidade total:

$p_{T_1}(D) = p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1 = 0.6 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.4 = 0.5$.

Calculamos a probabilidade condicional $p_{T_2}(D)$, é dicir, a probabilidade de que dúas balas que deron no branco e o terceiro tirador fallou. En outras palabras, encontramos a probabilidade de que o primeiro e o segundo tiradores fagan branco. Estes dous sucesos son independentes, e por iso é aplicable o teorema do produto.

$p_{T_2}(D) = p_1 \cdot p_2 = 0.6 \cdot 0.5 = 0.30$.

Pola fórmula de Bayes obtemos a probabilidade de que o terceiro tirador acertara no branco:

$$p_D(T_1) = \frac{p(T_1) \cdot p_{T_1}(D)}{p(T_1) \cdot p_{T_1}(D) + p(T_2) \cdot p_{T_2}(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.5}{0.4 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.30} = \frac{10}{19} = 0.5263 \approx 0.53.$$

197. Unha furna contén 25 bólas brancas sen marcar, 75 bolas brancas marcadas, 125 bolas negras sen marcar e 175 bolas negras marcadas.

197.1. Sácase unha bóla. Calcula a probabilidade de que sexa branca.

197.2. Extráese unha bola e está marcada. Cal é a probabilidade de que sexa branca?

197.3. Extráese unha bóla. Cal é a probabilidade de que sexa negra e estea marcada?

197.4. Son independentes os sucesos «sacar bóla marcada» e «sacar bóla branca»?

Solución:

Resumimos a información na seguinte táboa:

	Marcada	Sen marcar	Total
Branca	75	25	100
Negra	175	125	300
Total	250	150	400

197.1. $p(\text{branca}) = \frac{100}{400} = \frac{1}{4}$.

197.2. $p(\text{branca/marcada}) = \frac{75}{250} = \frac{3}{10}$.

197.3. $p(\text{negra e marcada}) = \frac{175}{400} = \frac{7}{16}$.

197.4. $p(\text{branca}) \cdot p(\text{marcada}) = \frac{100}{400} \cdot \frac{250}{400} = \frac{5}{32}$.

$p(\text{branca e marcada}) = \frac{75}{400} = \frac{3}{16} \neq \frac{5}{32} \rightarrow$ non son sucesos independentes.

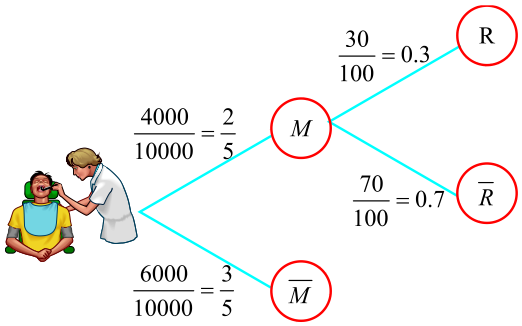
198. Nunha cidade residen 10000 habitantes, e deles 4000 son maiores de 50 anos. Como resultado dunha enquisa realizada nesa cidade determinouse que 70 de cada 100 persoas maiores de 50 anos non fai ningunha revisión dental anual. Determinar a probabilidade de que elixida ao chou unha persoa nesa cidade resulte ser maior de 50 anos e que faga unha revisión dental anual. Xustifica a resposta.

Solución:

Sexan os sucesos $M = \{\text{ser maior de 50 anos}\}$ e $R = \{\text{facer a revisión dental anual}\}$ e $\overline{M}$ e $\overline{R}$ os seus sucesos complementarios.

A probabilidade pedida é $p(M \cap R)$: $p(M \cap R) = p(M) \cdot p(M/R) =$

$= \frac{2}{5} \cdot 0.3 = 0.12$.



199. Dúas persoas pensan cada unha delas nun número do 0 ao 9. Calcula a probabilidade de que as dúas persoas non pensen no mesmo número.

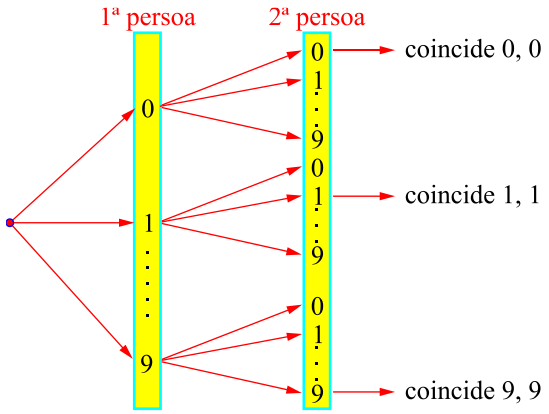
Solución:

Número de posibilidades: $10^2 = 100$.

Número de veces que coinciden: 10.

Número de veces que non coinciden: $100 - 10 = 90$.

$p(\text{non pensar no mesmo nº}) = \dfrac{90}{100} = 0.9$.



200. Sexan os sucesos A, B e C con probabilidades $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{1}{3}$ e $p(C) = \frac{1}{4}$ e tales que $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$, $A \cap C = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$. Obtén as seguintes probabilidades:

200.1. $p\left[\left(\overline{A \cap B}\right)\right]$. | 200.2. $p\left(A \cap \overline{B}\right)$. | 200.3. $p\left[\left(\overline{A \cup B}\right)\right]$. | 200.4. $p\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$. | 200.5. $p(A \cup B \cup C)$.

Solución:

200.1. $p\left[\left(\overline{A \cap B}\right)\right] = 1 - p(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

200.2. $A = (A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) \to p(A) = p(A \cap B) + p\left(A \cap \overline{B}\right) \to \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + p\left(A \cap \overline{B}\right) \to p\left(A \cap \overline{B}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

200.3. $\begin{cases} p\left[\left(\overline{A \cup B}\right)\right] = 1 - p(A \cup B) \\ p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \end{cases} \to p\left[\left(\overline{A \cup B}\right)\right] = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

200.4. $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} \to p\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = p\left(\overline{A \cup B}\right) = \frac{1}{3}$.

200.5. $\begin{cases} A \cap C = \varnothing \\ B \cap C = \varnothing \end{cases} \to (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = \varnothing \to (A \cup B)$ e C son conxuntos disxuntos $\to$

$\to p(A \cup B \cup C) = p((A \cup B) \cup C) = p(A \cup B) + p(C) = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$.

201. Analizadas as estatísticas de visitantes aos museos dunha cidade durante o último ano observouse que 1000000 de persoas visitaron o total de museos. En particular, sábese que 700000 persoas visitaron o museo A e 500000 visitaron o museo B, e non se ten información do resto. Calcula:

201.1. A probabilidade de que un visitante visite o museo A.

201.2. A probabilidade de que un visitante visite o museo B.

201.3. A probabilidade de que visite os dous museos A e B.

201.4. A probabilidade de que visite, ao menos, un dos dous museos A ou B.

Solución:

201.1. $p(A) = \dfrac{700000}{1000000} = \dfrac{7}{10} = 0.7$.

201.2. $p(B) = \dfrac{500000}{1000000} = \dfrac{1}{2} = 0.5$.

201.3. O suceso «que visite os museos A e B» desígnase por $A \cap B$, e hai que calcular $p(A \cap B)$. Sábese que:

$A = (A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)$ e $B = (A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$. Polo tanto:

$$\begin{cases} p(A\cap B)\le p(A\cap B)+p(A\cap \overline{B})=p(A)=0.7 \\ p(A\cap B)\le p(A\cap B)+p(\overline{A}\cap B)=p(B)=0.5 \end{cases} \to \boxed{p(A\cap B)\le 0.5}.$$

Como se sabe que :

$$\begin{cases} p(A\cup B)=p(A)+p(b)-p(A\cap B) \\ p(A\cup B)\le 1 \end{cases} \to \begin{cases} p(A)+p(B)-p(A\cap B)\le 1 \\ 0.7+0.5-p(A\cap B)\le 1 \end{cases} \to \boxed{0.2\le p(A\cap B)}$$ Polo tanto, resulta que $0.2\le p(A\cap B)\le 0.5$.

201.4. O suceso «que visite ao menos un dos museos» represéntase por $A\cup B$. Hai que calcular $p(A\cup B)$. Razoando de maneira similar ao punto anterior tense, considerando que $A\cup B=(A\cap B)\cup(A\cap \overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$, tense que:

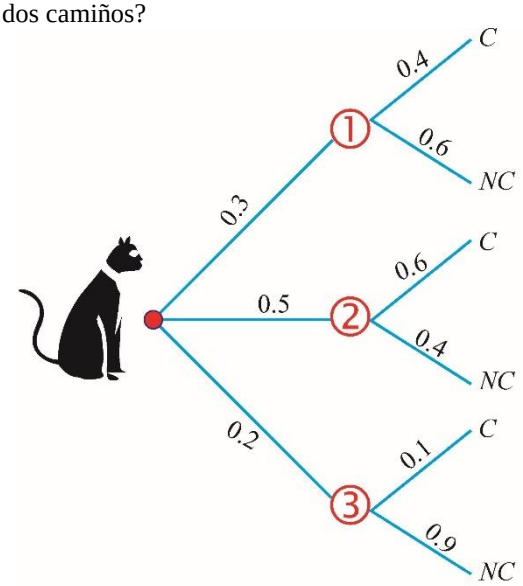
$$\begin{cases} 0.7\le p(A)\le p(A)+p(\overline{A}\cap B)\le p(A\cap B)+p(A\cap \overline{B})+p(\overline{A}\cap B)=p(A\cup B)\le 1 \\ 0.5\le p(B)\le p(B)+p(A\cap \overline{B})\le p(A\cap B)+p(A\cap \overline{B})+p(\overline{A}\cap B)=p(A\cup B)\le 1 \end{cases} \to 0.7\le p(A\cup B)\le 1.$$

202. Un gato persegue a un rato. O rato pode escapar por tres buracos: ①, ② e ③, e en cada unha delas pode ser cazado (C) ou non (N). Sábese polas experiencias de caza anteriores que a probabilidade que ten o rato de coller cada buraco é $p(①)=0.3$, $p(②)=0.5$, $p(③)=0.2$, e no seu caso, $p(C/①)=0.4$, $p(C/②)=0.6$ e $p(C/③)=0.1$

202.1. Calcula a probabilidade de que o gato cace o rato.

202.2. Se o gato cazou o rato, ¿cal é a probabilidade de que o cace en cada un dos camiños?

Solución:



202.1. $p(①\cap C)=0.3\cdot 0.4=0.12$; $p(②\cap C)=0.5\cdot 0.6=0.30$;

$p(③\cap C)=0.2\cdot 0.1=0.02$.

A probabilidade de que o gato cace o rato é:

$$p(C)=p(①)\cdot p(C/①)+p(②)\cdot p(C/②)+p(③)\cdot p(C/③)=$$
$$=0.12+0.30+0.02=0.44.$$

202.2. Pola regra de Bayes:

$$p(①/C)=\frac{p(①\cap C)}{p(C)}=\frac{0.12}{0.44}=0.2727\cdots$$

$$p(②/C)=\frac{p(②\cap C)}{p(C)}=\frac{0.30}{0.44}=0.6818\cdots$$

$$p(③/C)=\frac{p(③\cap C)}{p(C)}=\frac{0.02}{0.44}=0.04545\cdots$$

203. A probabilidade de que un estudante A aprobe o exame final de estatística é 0.7; a de outro estudante B é 0.5 e a probabilidade de que aproben os dous estudantes é 0.4. Obtén as probabilidades dos seguintes sucesos:

203.1. Que ao menos un dos dous aprobe o exame.

203.2. Que ningún dos dous aprobe o exame.

203.3. Que só un aprobe o exame.

Solución:

Sexan os sucesos A: o estudante A aproba o exame e B: o estudante B aproba o exame. Tense que $p(A)=0.7$, $p(B)=0.5$ e $p(A\cap B)=0.4$.

203.1. O suceso «ao menos un dos dous aproba o exame» será $A_1=A\cup B$. Así:

$$p(A_1)=p(A\cup B)=p(A)+p(b)-p(A\cap B)=0.7+0.5-0.4=0.8.$$

203.2. O suceso «ningún dos dous aproba o exame» será $A_2=\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$. Polo tanto:

$$p(A_2)=p(\overline{A}\cap\overline{B})=p(\overline{A\cup B})=1-p(A\cup B)=1-0.8=0.2.$$

203.3. O suceso «só un aproba o exame» será $A_3=\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)$ e como $\left(A\cap\overline{B}\right)$ e $\left(\overline{A}\cap B\right)$ son conxuntos disxuntos, tense que $p\left(A_3\right)=p\left(A\cap\overline{B}\right)+p\left(\overline{A}\cap B\right)$. Sabendo que:

$$\begin{cases} A=(A\cap B)\cup\left(A\cap\overline{B}\right) \\ B=(A\cap B)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\end{cases}\rightarrow\begin{cases} p(A)=p(A\cap B)+p\left(A\cap\overline{B}\right) \\ p(B)=p(A\cap B)+p\left(\overline{A}\cap B\right)\end{cases}\rightarrow\begin{cases} p\left(A\cap\overline{B}\right)=p(A)-p(A\cap B) \\ p\left(\overline{A}\cap B\right)=p(B)-p(A\cap B)\end{cases}.$$

Substituíndo estes valores en $p\left(A_3\right)=p\left(A\cap\overline{B}\right)+p\left(\overline{A}\cap B\right)$, resulta:

$$p\left(A_3\right)=p\left(A\cap\overline{B}\right)+p\left(\overline{A}\cap B\right)=p(A)-2\cdot p(A\cap B)+p(B)=0.7-2\cdot 0.4+0.5=0.4\,.$$

204. Téñense dúas furnas U_1 e U_2 que conteñen bolas vermellas, azuis e verdes: na furna U_1 hai 4 bolas azuis, 3 bolas vermellas e 3 verdes; na furna U_2 m 4 bolas vermellas, 3 azuis e 1 verde.

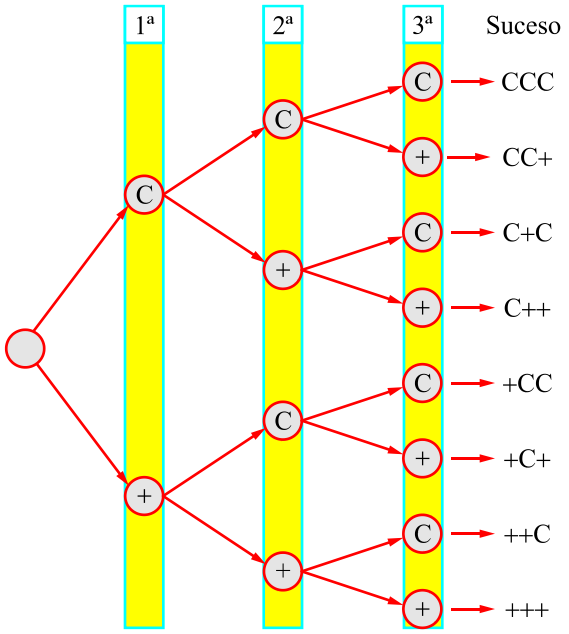
Lánzanse tres moedas ao ar, e se se obteñen exactamente dúas caras extráese unha bola da furna U_1; en calquera outro caso extráese da furna U_2. Pídese:

204.1. Facer un diagrama para o experimento aleatorio de lanzar as tres moedas.

204.2. Calcular a probabilidade de que a bola extraída sexa azul.

Solución:

204.1. Diagrama de árbore de lanzar tres moedas:

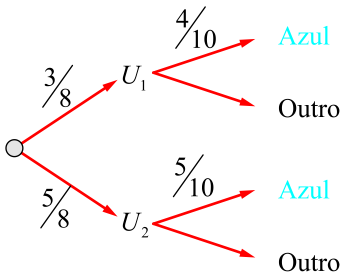


204.2. Se se obteñen dúas caras ao lanzar tres moedas, temos os sucesos:

$$\{CC+, C+C, +CC\}$$

$$p(2\text{ caras})=\frac{3}{8}=p(\text{furna } U_1)$$

$$p(\text{non ter dúas caras})=\frac{5}{8}=p(\text{furna } U_2)$$



$$p(\text{Azul})=\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{10}+\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{10}=\frac{37}{80}\,.$$

205. Sácase unha bola de billar ao chou dunha caixa que contén 15 bolas numeradas do 1 ao 15 e anótase o número n.

205.1. Determina a probabilidade p de que n exceda 10.

205.2. Se n é par, determina a probabilidade p de que n exceda 10.

Solución:

205.1. Para que n exceda 10, n pode ser un dos 5 números 11, 12, 13, 14 ou 15. Así $p(n\text{ excede }10)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

205.10. O espazo mostral reducido E constituído polos 7 números pares é $E=\{2,4,6\,8,10,12,14\}$. Neste espazo só o 12 e o 14 exceden 10, polo que $p(n\text{ par excede }10)=\frac{2}{7}$.

206. Nun instituto o 25% dos estudantes suspenderon matemáticas, o 15% suspenderon química e o 10% suspenderon matemáticas e química. Selecciónase ao chou un estudante.

206.1. Se o estudante suspendeu química, ¿cal é a probabilidade de que suspendera matemáticas?

206.2. Se o estudante suspendeu matemáticas, ¿cal é a probabilidade de que suspendera química?

206.3. Cal é a probabilidade de que o estudante suspendera matemáticas ou química?

206.4. Cal é a probabilidade de que o estudante non suspendera matemáticas nin química?

Solución:

206.1. Búscase a probabilidade $p(M/Q)$ de que o estudante suspendera matemáticas condicionada a que tivera suspensa química.

$$p(M/Q)=\frac{p(M\cap Q)}{p(Q)}=\frac{0.10}{0.15}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}.$$

206.2. Búscase a probabilidade $p(Q/M)$ de que o estudante suspendera química condicionada a que tivera suspensa matemáticas.

$$p(Q/M)=\frac{p(M\cap Q)}{p(M)}=\frac{0.10}{0.25}=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}.$$

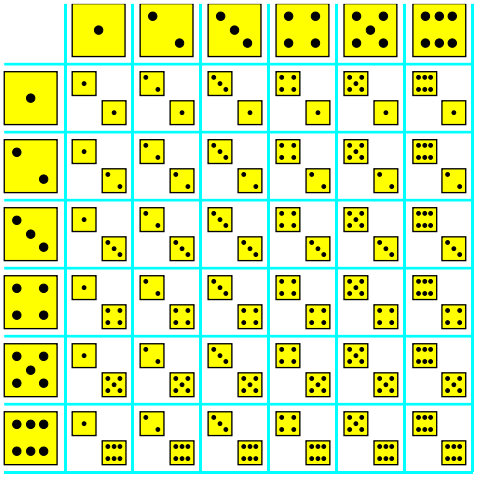
206.3. Pola regra da adición [páxina 39] tense:

$$p(M\cup Q)=p(M)+p(Q)-p(M\cap Q)=0.25+0.15-0.10=0.30.$$

206.4. Os estudantes que non suspenderon matemáticas nin química forman o complemento do conxunto $M\cup Q$, é dicir, forman o evento $\overline{(M\cup Q)}$.

Polo tanto:

$$p\overline{(M\cup Q)}=1-p(M\cup Q)=1-0.30=0.70.$$



207. Lánzanse ao ar dous dados equilibrados. Se os números que aparecen son distintos, atopa a probabilidade p de que:

207.1. A suma sexa 6.

207.2. Apareza un as.

207.3. A suma sexa 4 ou menos.

Solución:

Hai 36 formas distintas nas que poden lanzarse dous dados, e 6 delas: $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,4)$, $(5,5)$ e $(6,6)$ teñen os mesmos números.

Polo tanto, o espazo mostral reducido E constará de $36-6=30$ elementos.

207.1. A suma 6 aparece de 4 formas: $(1,5)$, $(2,4)$, $(4,2)$ e $(5,1)$, xa que non se pode incluír o $(3,3)$ debido a que os números son diferentes. Polo tanto:

$$p(\text{suma 6/resultados distintos nos dous dados})=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$$

207.2. Un as pode aparecer en 10 formas: $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(1,6)$, $(6,1)$, $(5,1)$, $(4,1)$, $(3,1)$ e $(2,1)$, dado que non se considera $(1,1)$ xa que os valores obtidos nos dous dados son distintos. Polo tanto:

$$p(\text{obter un as/resultados distintos nos dous dados})=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$$

207.3. A suma é 4 ou menos pode obterse de 4 formas distintas: $(1,2)$, $(1,3)$, $(3,1)$, $(2,1)$ dado que non se consideran $(1,1)$ e $(2,2)$ xa que os valores obtidos nos dous dados son distintos. Neste caso tense que a probabilidade pedida é:

$$p(\text{suma 4 ou menos/resultados distintos nos dous dados})=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$$

208. Lanzamos ao ar catro dados perfectamente equilibrados.

208.1. Calcula a probabilidade de non obter ningún 6 ao lanzar catro dados.

208.2. Calcula a probabilidade de obter algún seis ao lanzar catro dados.

Solución:

208.1. A probabilidade de non obter un as ao lanzar un dado é $p(\text{non as})=\frac{5}{6}$, polo que a probabilidade de non obter ningún as ao lanzar catro dados é:

$$p(\text{ningún as 4 dados})=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^4=0.482253\cdots$$

208.2. A probabilidade de obter algún ás é:

$$p(\text{algún as})=1-p(\text{ningún as})=1-\left(\frac{5}{6}\right)^4=0.51774\cdots$$

209. Polos datos do censo de 1891 de Inglaterra e País de Gales estableceuse que: os pais de ollos negros e os fillos de ollos negros $(A\cap B)$ constitúen o 5% das persoas estudadas; os pais de ollos negros e os fillos de ollos claros $\left(A\cap\overline{B}\right)$ son o 7.9% do censo; os pais de ollos claros e os fillos de ollos negros $\left(\overline{A}\cap B\right)$ son o 8.9%; os pais de ollos claros e os fillos de ollos claros $\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$ son o 78.2%. Calcula o vínculo entre o color de ollos dos pais e dos fillos.

Solución:

Dos datos do problema téñense as probabilidades seguintes: $p(A\cap B)=0.05$, $p\left(A\cap\overline{B}\right)=0.079$, $p\left(\overline{A}\cap B\right)=0.089$, $p\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=0.782$.

— Probabilidade condicional de que o fillo teña ollos negros se o pai ten ollos negros:

$$p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{p(A\cap B)}{p(A\cap B)+p\left(A\cap\overline{B}\right)}=\frac{0.05}{0.05+0.079}=0.0387596\approx 0.39.$$

— Probabilidade condicional de que o fillo teña os ollos claros se o pai ten os ollos negros:

$$p_A\left(\overline{B}\right)=1-p_A(B)=1-0.39=0.61.$$

— Probabilidade condicional de que o fillo teña ollos negros se o pai ten os ollos claros:

$$p_{\overline{A}}(B)=\frac{p\left(\overline{A}\cap B\right)}{p\left(\overline{A}\right)}=\frac{p\left(\overline{A}\cap B\right)}{p\left(\overline{A}\cap B\right)+p\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)}=\frac{0.089}{0.089+0.782}=0.10218\approx 0.102.$$

— Probabilidade condicional de que o fillo teña os ollos claros se o pai ten os ollos claros:

$$p_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right)=1-p_{\overline{A}}(B)=1-0.102=0.898.$$

210. Sexan A e B sucesos con $p(A)=0.6$, $p(B)=0.3$ e $p(A\cap B)=0.2$. Calcula $p(A/B)$, $p(B/A)$, $p(A\cup B)$, $p\left(\overline{A}\right)$ e $p\left(\overline{B}\right)$.

Solución:

— $p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{0.2}{0.3}=\frac{2}{3}$.

— $p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{0.2}{0.6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

— $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=0.6+0.3-0.2=0.7$.

— $p\left(\overline{A}\right)=1-p(A)=1-0.6=0.4$.

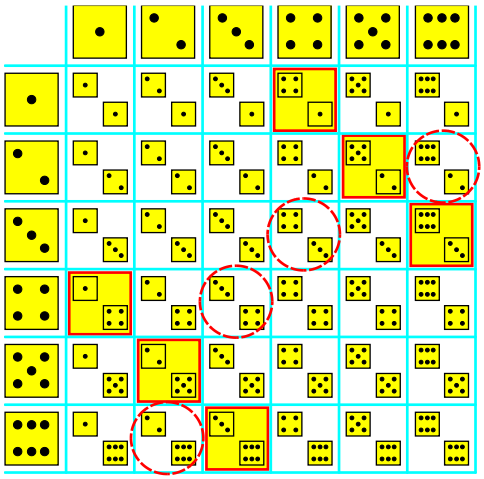
— $p\left(\overline{B}\right)=1-p(B)=1-0.3=0.7$.

211. Lanzamos ao ar dous dados perfectamente equilibrados.

211.1. Cal é a probabilidade de obter 12 ao multiplicar os resultados de dous dados correctos?

211.2. Cal é a probabilidade de que ao lanzar dous dados correctos a diferenza das súas puntuacións sexa 3?

Solución:



211.1. Evidentemente hai 4 casos favorables e 36 casos posibles. A probabilidade pedida é:

$$p(\times = 12) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

211.2. Evidentemente, hai 6 casos favorables dos 36 posibles, polo que a probabilidade pedida é:

$$p(- = 3) = \frac{6}{33} = \frac{1}{6}.$$

212. Nunha cidade o 40% das persoas considéranse conservadoras (C) o 35% considéranse liberais (L) e o 25% considéranse independentes (I). Durante unha elección o 45% dos conservadores votaron, o 40% dos liberais votaron e o 60% dos independentes votaron. Supoñamos que se selecciona unha persoa aleatoriamente.

212.1. Calcula a probabilidade de que a persoa vote.

212.2. Se a persoa votou, calcula a probabilidade de que o votante sexa conservador, liberal ou independente.

Solución:

212.1. Sexa V o suceso «unha persoa vota». Hai que calcular $p(V)$.

Pola lei da probabilidade total:

$$p(V) = p(C)\cdot p(V/C) + p(L)\cdot p(V/L) + p(I)\cdot p(V/I) = 0.40\cdot 0.45 + 0.35\cdot 0.40 + 0.25\cdot 0.60 = 0.47.$$

212.2. Usando a regra de Bayes:

$$p(C/V) = \frac{p(C)\cdot p(V/C)}{p(V)} = \frac{0.40\cdot 0.45}{0.47} = \frac{18}{47} \approx 38.29\%. \qquad p(L/V) = \frac{p(L)\cdot p(V/L)}{p(V)} = \frac{0.35\cdot 0.40}{0.47} = \frac{14}{47} \approx 29.787\%.$$

$$p(I/V) = \frac{p(I)\cdot p(V/I)}{p(V)} = \frac{0.25\cdot 0.60}{0.47} = \frac{15}{47} \approx 31.91\%.$$

213. Un banco analiza as datas dos cheques que emiten os seus clientes e chega á conclusión de que as persoas que teñen fondos na conta corrente emiten cheques con data posterior só no 0.2% dos casos; o 95% das persoas que non teñen fondos na conta corrente emiten cheques con data posterior. En xeral, a proporción de cheques que chegan á ventaíña do banco e que teñen fondos é do 92%. Nun momento determinado recíbese un cheque en caixa con data posterior. Determina a probabilidade de que ese cheque sexa dun cliente sen fondos na conta.

Solución:

Sexan os sucesos:

A_1: o cheque que se recibe é dun cliente sen fondos, A_2: o cheque que se recibe é dun cliente con fondos e B: o cheque que se recibe ten data posterior.

Do enunciado tense:

$p(A_1) = 0.08$, $p(A_2) = 0.92$, $p(B/A_1) = 0.95$, $p(B/A_2) = 0.002$.

Pídese calcular $p(A_1/B) \equiv p_B(A_1)$.

Pola regra de Bayes tense:

$$p_B(A_1) \equiv p(A_1/B) = \frac{p(A_1)\cdot p(B/A_1)}{p(A_1)\cdot p(B/A_1) + p(A_2)\cdot p(B/A_2)} = \frac{0.08\cdot 0.95}{0.08\cdot 0.95 + 0.92\cdot 0.002} = 0.9763 \approx 0.98.$$

214. Nun pedido de 10 electrodomésticos sábese que un deles ten un defecto de fábrica. Nun día véndense 3 deles. Calcula a probabilidade de que se vendan tres en bo estado.

Solución:

Sexan os sucesos B_i : o i –ésimo electrodoméstico vendido esta en bo estado, $i = 1, 2, 3$.

Pídese calcular a probabilidade do suceso $B_1 \cap B_2 \cap B_3$.

Aplicando a regra do produto tense:

$$p(B_i \cap B_2 \cap B_3) = p(B_1) \cdot p_{B_1}(B_2) \cdot p_{B_1 \cap B_2}(B_3) = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{10} = 0.7 .$$

215. Nunha sección empresarial traballan 18 homes e 12 mulleres. Selecciónanse 3 persoas ao chou e con igual probabilidade para cada traballador. Calcula a probabilidade de que todas as persoas seleccionadas sexan mulleres.

Solución:

Sexan os sucesos S_i : ser muller a seleccionada na i –ésima extracción, $i = 1, 2, 3$. Pídese a probabilidade $p(S_1 \cap S_2 \cap S_3)$.

$$p(S_1 \cap S_2 \cap S_3) = p(S_1) \cdot p_{S_1}(S_2) \cdot p_{S_1 \cap S_2}(S_3) = \frac{12}{30} \cdot \frac{11}{29} \cdot \frac{10}{28} = \frac{11}{203} = 0.05418 \approx 0.054 .$$

216. Lanzamos un dado e unha moeda. Os posibles resultados son $(1, \mathrm{C})$, $(1, +)$, $(2, \mathrm{C})$, … e sexan os sucesos

$A = \{\text{Sacar un ou dous no dado}\}$, $B = \{\text{Sacar } + \text{ na moeda}\}$, $D = \{(1, \mathrm{C}), (2, +), (3, \mathrm{C}), (3, +), (6, +)\}$.

216.1. Describe o espazo de mostra cos doce elementos dos que consta.

216.2. Describe os sucesos A e B mediante todos os elementos.

216.3. Determina $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \cup \overline{D}$.

Solución:

216.1. $E = \{(1, \mathrm{C}), (1, +), (2, \mathrm{C}), (2, +), (3, \mathrm{C}), (3, +), (4, \mathrm{C}), (4, +), (5, \mathrm{C}), (5, +), (6, \mathrm{C}), (6, +)\}$.

216.2. $A = \{(1, \mathrm{C}), (1, +), (2, \mathrm{C}), (2, +)\}$.

$B = \{(1, +), (2, +), (3, +), (4, +), (5, +), (6, +)\}$.

216.3. $A \cup B = \{(1, \mathrm{C}), (1, +), (2, \mathrm{C}), (2, +), (3, +), (4, +), (5, +), (6, +)\}$.

$A \cap B = \{(1, +), (2, +)\}$.

$D = \{(1, \mathrm{C}), (2, +), (3, \mathrm{C}), (3, +), (6, +)\} \rightarrow \overline{D} = \{(1, +), (2, \mathrm{C}), (4, \mathrm{C}), (4, +), (5, \mathrm{C}), (5, +), (6, \mathrm{C})\}$.

$A \cup \overline{D} = \{(1, \mathrm{C}), (1, +), (2, \mathrm{C}), (2, +), (4, \mathrm{C}), (4, +), (5, \mathrm{C}), (5, +), (6, \mathrm{C})\}$.

217. Dous dos tres elementos que constitúen un mecanismo que funcionan independentemente fallaron. Calcula a probabilidade de que fallaran os elementos primeiro e segundo, se as probabilidades de fallo dos elementos primeiro, segundo e terceiro son, respectivamente, $p_1 = 0.2$, $p_2 = 0.4$ e $p_3 = 0.3$.

Solución:

Sexa o suceso F : fallaron dous elementos. Poden facerse as seguintes suposicións (hipóteses):

A_1 : fallaron os elementos primeiro e segundo e o terceiro elemento non fallou; ademais, como os elementos traballan independentemente, é aplicable o teorema do produto.

$$p(A_1) = p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 = 0.2 \cdot 0.4 \cdot 0.7 = 0.056 .$$

A_2 : fallaron os elementos primeiro e terceiro e o segundo non fallou. Como traballan independentemente:

$$p(A_2) = p_1 \cdot q_2 \cdot p_3 = 0.2 \cdot 0.6 \cdot 0.3 = 0.036 .$$

A_3 : fallaron os elementos segundo e terceiro, e o primeiro elemento non fallou. Tense:

$$p(A_3) = q_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0.8 \cdot 0.4 \cdot 0.3 = 0.096 .$$

A_4 : fallou só un elemento.

A_5 : fallaron os tres elementos.

A_6 : non fallou ningún dos elementos.

As probabilidades destas tres últimas hipóteses (A_4 , A_5 e A_6) non se calculan, dado que para estas hipóteses o suceso F (fallan dous elementos) é imposible e, polo tanto, as probabilidades condicionais $p_{A_4}(F) = p_{A_5}(F) = p_{A_6}(F) = 0$, polo que tamén son cero os produtos $p(A_4)\cdot p_{A_4}(F)$, $p(A_5)\cdot p_{A_5}(F)$ e $p(A_6)\cdot p_{A_6}(F)$.

Xa que para as hipóteses A_1 , A_2 e A_3 o suceso F é certo, as respectivas probabilidades condicionais son iguais á unidade: $p_{A_1}(F) = p_{A_2}(F) = p_{A_3}(F) = 1$.

A probabilidade de que fallaran dous elementos, pola fórmula da probabilidade completa, é:

$$p(F) = p(A_1)\cdot p_{A_1}(F) + p(A_2)\cdot p_{A_2}(F) + p(A_3)\cdot p_{A_3}(F) + \underbrace{p(A_4)\cdot p_{A_4}(F)}_{0} + \underbrace{p(A_5)\cdot p_{A_5}(F)}_{0} + \underbrace{p(A_6)\cdot p_{A_6}(F)}_{0} =$$

$$= 0.056\cdot 1 + 0.036\cdot 1 + 0.096\cdot 1 = 0.188.$$

Polo teorema de Bayes, a probabilidade de que fallaran os elementos primeiro e segundo é:

$$p_F(A_1) = \frac{p(A_1)\cdot p_{A_1}(F)}{p(F)} = \frac{0.056\cdot 1}{0.188} = 0.29787 \approx 0.30 .$$

ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE. CAPÍTULO II. DISTRIBUCIÓNS DE PROBABILIDADE

Variables aleatorias. Distribucións de probabilidade 77
1. Idea intuitiva de variable aleatoria 77
2. Variables aleatorias 77
2.1.Variables aleatorias discretas 78
2.2. Variables aleatorias continuas 78
3. Distribución de probabilidade de variables aleatorias discretas 78
3.1. Representacións da función de probabilidade dunha variable aleatoria 82
3.2. Función de distribución (ou función de distribución acumulativa) 83
3.3. Media (esperanza matemática) e varianza dunha variable aleatoria discreta 83
3.4. Distribución binomial (función). Idea intuitiva 88
4. Distribucións continuas 101
4.1. Aproximación intuitiva ao concepto de función de densidade 101
5. Funcións de densidade ou función de probabilidade continua 102
5.1. Media (esperanza matemática), varianza e desviación típica dunha variable aleatoria continua 105
5.2. Función de distribución dunha variable aleatoria continua 106
5.3. Distribución normal 109
5.4. Aproximación normal á distribución binomial 120

VARIABLES ALEATORIAS. DISTRIBUCIÓNS DE PROBABILIDADE

Ata agora desarrollamos os conceptos de probabilidade sobre os resultados ou sucesos dun experimento aleatorio. Pero os experimentos aleatorios son tales que os resultados a que dan lugar poden ser de natureza cualitativa e cuantitativa. Así, por exemplo, serían resultados cualitativos os derivados dos seguintes experimentos aleatorios:

- O lanzamento dunha moeda: cara ou cruz.
- A calidade das pezas fabricadas nunha planta: boas ou defectuosas.
- A preferencia dunha persoa sobre tres tipos de coches: prefire o coche A, o coche B, o coche C, …

Outros exemplos de experimentos aleatorios cuxos resultados son cuantitativos serían:

- O número de accidentes nunha cidade nun día dado.
- O número de clientes que chegan a unha tenda durante unha hora.
- O número de erros detectados na contabilidade dunha empresa.
- A suma dos puntos que aparecen cando se lanzan simultaneamente dous dados, …

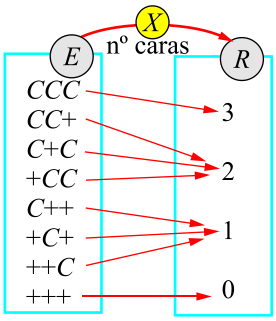
Traballar con resultados cualitativos dun experimento aleatorio introduce certas complicacións, sendo de gran utilidade o cuantificar os resultados cualitativos do experimento aleatorio, ou o que é o mesmo, asignar un valor numérico a cada suceso do espazo mostral correspondente ao experimento aleatorio considerado. Esta relación entre os sucesos do espazo mostral e o valor numérico que se lles asigna establécese mediante a *variable aleatoria*.

Sexa E o espazo mostral dun experimento aleatorio. O resultado do experimento, os puntos do espazo mostral E, non son necesariamente números: ao lanzar unha moeda obtemos cara ou cruz. Con frecuencia deséxase asignar un número específico a cada resultado dun experimento.

1. IDEA INTUITIVA DE VARIABLE ALEATORIA

218. Consideremos o experimento aleatorio consistente en lanzar tres moedas. O espazo mostral é:

$$E=\{CCC, CC+, C+C, +CC, C++, +C+, ++C, +++\}$$



Supoñamos que a cada un deses sucesos lle asignamos o número real «*número de caras*», como se ve na figura adxunta: $X(CCC)=3$, …

Esta relación que acabamos de construír é unha función do espazo mostral E no conxunto dos números reais $\mathbb{R}$:

$$X: E \to \mathbb{R}.$$

E	$\xrightarrow[\text{nº de caras}]{X}$	$\mathbb{R}$
CCC	$\longrightarrow$	3
$CC+$	$\longrightarrow$	2
$C+C$	$\longrightarrow$	2
$+CC$	$\longrightarrow$	2
$C++$	$\longrightarrow$	1
$+C+$	$\longrightarrow$	1
$++C$	$\longrightarrow$	1
$+++$	$\longrightarrow$	0

Esta función asocia cada terna co número de caras que contén. É dicir, tense:

$$X(CCC)=3,\ X(CC+)=2,\ X(C+C)=2,\ X(+CC)=2,\ X(C++)=1,$$
$$X(+C+)=1,\ X(++C)=1,\ X(+++)=0.$$

É evidente que o recorrido ou rango desta función é o conxunto $\{0,1,2,3\}$.

2. VARIABLES ALEATORIAS

Chámase *variable aleatoria* a toda *función* (ou *lei*) que relaciona cada elemento do espazo mostral E cun número real: $X: E \to \mathbb{R}$.

- Unha variable aleatoria é *discreta*, cando só pode tomar uns certos valores enteiros.
- Unha variable aleatoria é *continua* cando pode tomar, ao menos teoricamente, tódolos posibles valores dentro dun certo intervalo da recta real.

219. Supoñamos que lanzamos dous dados. O espazo mostral é:

$$E=\{(1,1),(1,2),(1,3),\cdots,(1,6),(2,1),\cdots,(6,1),\cdots,(6,6)\}$$

A función que asocia cada resultado coa *suma dos puntos obtidos* en cada caso é unha variable aleatoria que toma os valores:

$$X(1,1)=2\,,\ \ldots\ X(6,3)=9\,,\ \ldots \rightarrow R_X=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}\,.$$

O recorrido, rango ou imaxe é o conxunto $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}\rightarrow$ é unha *variable aleatoria discreta*.

X	$\xrightarrow{+}$	$\mathbb{R}$
$(1,1)$	$\rightarrow$	2
$(1,2)$	$\rightarrow$	3
$\cdots$	$\rightarrow$	$\cdots$
$(3,4)$	$\rightarrow$	7
$\cdots$	$\rightarrow$	$\cdots$
$(6,6)$	$\rightarrow$	12

220. Nun estudio antropométrico realizado sobre 1000 varóns medíuselles o perímetro torácico. A función que asocia a cada un dos varóns o seu perímetro torácico é unha variable aleatoria.

Neste caso, as imaxes estarán, por exemplo, no intervalo $[80,160]$ cm, podendo tomar calquera valor de entre os infinitos que hai nese intervalo. É unha *variable aleatoria continua*.

Dunha maneira *moi informal* poderíamos dicir que unha *variable aleatoria* é unha función cuxo valor numérico está determinado polo resultado dun experimento aleatorio, ou tamén que é un xeito de asociar un número real a un experimento aleatorio.

En xeral, notaremos con letras maiúsculas X, Y, Z, … á variable aleatoria e con letras minúsculas aos seus valores x, y, z, …

A variable aleatoria pode tomar un número numerable ou non numerable de valores posibles, dando lugar aos principais tipos de variables aleatorias: *discretas* e *continuas*.

2.1. Variables aleatorias discretas

Dise que unha variable aleatoria X é *discreta* se pode tomar un número finito ou infinito, pero numerable, de posibles valores.

Así é unha variable aleatoria de tipo discreto o número de pezas defectuosas que aparecen nun proceso de fabricación, o número de chamadas telefónicas recibidas nunha centraliña nun determinado período de tempo, o número de depósitos dunha entidade bancaria.

Se designamos a correspondente variable aleatoria por X, entón X pode tomar calquera dos valores $x=0$, 1, 2, 3, …

2.2. Variables aleatorias continuas

Dise que unha variable aleatoria X é *continua* se pode tomar un número infinito (non numerable) de valores, ou ben, se pode tomar un número infinito de valores correspondentes aos puntos de un ou máis intervalos da recta real.

É dicir, a variable aleatoria de tipo continuo pode tomar calquera valor nun ou máis intervalos da recta real. Así, situacións típicas de variables aleatorias continuas son as que fan referencia a medidas tales como tempo, peso, lonxitude.

221. Por exemplo, se representamos por X o tempo que dedican uns alumnos a facer un exame cuxa duración máxima é de dúas horas (120 minutos), teríamos unha variable aleatoria de tipo continuo que pode tomar infinitos valores no intervalo $0\le x\le 120$.

222. Outro exemplo de variable aleatoria continua será a cantidade de choiva caída cada día nun determinado punto xeográfico, pois un equipo de medida de moita precisión daríanos cada día a cantidade de choiva rexistrada que poderíamos facer corresponder cun punto único nun intervalo delimitado polo valor mínimo e máximo de choiva prevista. Cada un dos infinitos puntos do intervalo podería ser un valor da variable aleatoria X continua correspondente á cantidade de choiva caída nese punto xeográfico durante un día.

3. Distribución de probabilidade de variables aleatorias discretas

Sexa X unha variable aleatoria discreta que toma un número finito de valores, n total, que indicaremos x_1, x_2, …, x_i, …, x_n.

A probabilidade de que a variable aleatoria X tome un valor particular x_i designarémolo por $p_i=P(x_i)=p(X=x_i)$.

Chámase *distribución de probabilidade*, *función de probabilidade* ou *masa de probabilidade* dunha variable aleatoria discreta X á función $P(X)$ que asocia a cada valor x_i da variable a probabilidade p_i con que toma ese valor: $P(x_i)=p(X=x_i)=p_i$.

Verifícase:

- $0 \le P(x_i) \le 1, \forall i$.
- $\sum_{i=1}^{n} P(x_i)=1 \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i=1 \leftrightarrow p_1+p_2+\cdots+p_n=1$.

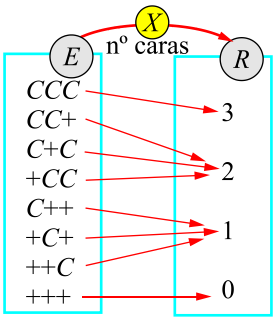
X	$p_i=p(X=x_i)$
x_1	p_1
x_2	p_2
…	…
x_n	p_n
	$\sum_{i=1}^{n} p_i=1$

- A primeira condición conleva (ou indica) que a distribución de probabilidade non pode ser negativa.
- Da segunda condición sácase que os sucesos $X=x_i$, para todos os valores posibles de x, son mutuamente excluíntes e exhaustivos.

223. Lanzamos ao ar tres moedas. Estuda a distribución de probabilidade da variable aleatoria que indica o *número de caras*.

Solución:

Variable aleatoria



O espazo mostral é, evidentemente,

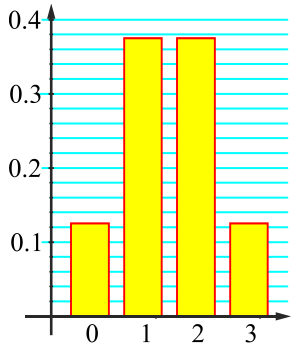
$$E=\{CCC, CC+, C+C, +CC, C++, +C+, ++C, +++\}.$$

Sexa X a variable aleatoria que asocia cada elemento co número de caras que aparecen.

A imaxe, recorrido ou rango desta variable aleatoria é

$$R_X=\{0,1,2,3\}\subset\mathbb{R}.$$

Vexamos como se constrúe a *función de probabilidade* ou *distribución de probabilidade*, ou *lei de probabilidade* ou *lei de distribución*, que representamos á dereita.



Para iso temos que averiguar a probabilidade de que $x\in\mathbb{R}$ tome os valores 0, 1, 2 ou 3:

$p(X=0)=p(\{(+++)\})=1/8=0.125$.

$p(X=1)=p(\{(C++),(+C+),(++C)\})=3/8=0.375$.

$p(X=2)=p(\{(CC+),(C+C),(+CC)\})=3/8=0.375$.

$p(X=3)=p(\{(CCC)\})=1/8=0.125$.

x_i	$p_i=p(X=x_i)$
0	$1/8$
1	$3/8$
2	$3/8$
3	$1/8$
	1

224. Supoñamos que lanzamos ao ar dous dados. Estuda a función de probabilidade da variable aleatoria que fai corresponder a cada un dos resultados anteriores o máximo dos valores obtidos.

Solución:

O espazo mostral é $E=\{(1,1),(1,2),(1,3),\cdots,(1,6),(2,1),\cdots,(6,1),\cdots,(6,6)\}$.

Sexa x a variable aleatoria: $X(a,b)=\max(a,b)$.

Esta variable aleatoria ten como conxunto imaxe $X(E)=R_X=\{1,2,3,4,5,6\}\subset\mathbb{R}$.

Calculamos a distribución de probabilidade de X, e facemos a táboa que a representa:

$P(1)=p(X=1)=p(\{(1,1)\})=1/36$, $P(2)=p(X=2)=p(\{(1,2),(2,2),(2,1)\})=3/36$,

$P(3)=p(X=3)=p(\{(1,3),(2,3),(3,3),(3,2),(3,1)\})=5/36$,

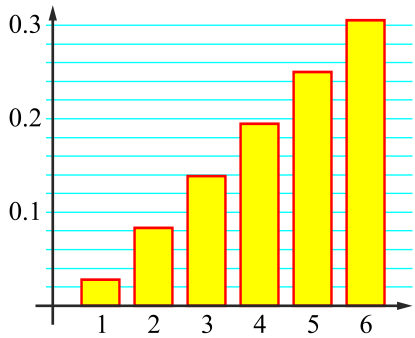
$P(4)=p(X=4)=p(\{(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(4,3),(4,2),(4,1)\})=7/36$.

Analogamente obtemos que

$P(5)=p(X=5)=9/36$ e $P(6)=p(X=6)=11/36$.

Unha representación gráfica da función de probabilidade vémola a continuación.

x_i	$p_i=p(X=x_i)$
1	$1/36$
2	$3/36$
3	$5/36$
4	$7/36$
5	$9/36$
6	$11/36$
	1

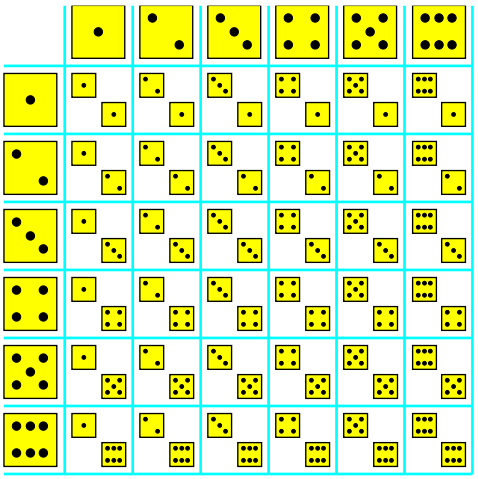


Sobre cada un dos puntos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 construímos un rectángulo que ten a altura proporcional á súa probabilidade.

Tódolos rectángulos teñen a base do mesmo tamaño, polo que a súa área tamén é proporcional á probabilidade que representan.

Tamén se pode facer a representación construíndo alíneas verticais da altura proporcional á probabilidade en vez de rectángulos.

225. Supoñamos que lanzamos ao ar dous dados equilibrados. Estuda a distribución de probabilidade da variable aleatoria que asocia cada resultado coa suma dos puntos obtidos en cada caso.



Solución:

O espazo mostral é:

$$E=\{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6),\cdots,(6,1),\cdots,(6,6)\}$$

Sexa X a variable aleatoria: $X(a,b)=a+b$;

Esa variable aleatoria ten como conxunto imaxe $X(E)=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}\subset\mathbb{R}$.

Calculamos a distribución de probabilidade $P(X)$, e facemos a táboa que a representa:

$P(2)=p(X=2)=p(\{(1,1)\})=1/36$.

$P(3)=p(X=3)=p(\{(1,2),(2,1)\})=2/36$.

$P(4)=p(X=4)=p(\{(1,3),(2,2),(3,1)\})=3/36$.

$P(5)=p(X=5)=p(\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\})=4/36$.

$P(6)=p(X=6)=p(\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\})=5/36$.

$P(7)=p(X=7)=p(\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\})=6/36$.

$P(8)=p(X=8)=p(\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\})=5/36$.

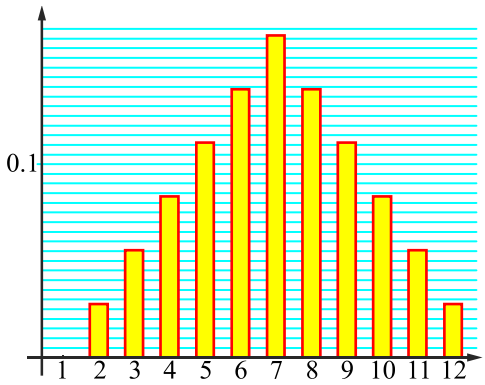
$P(9)=p(X=9)=p(\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\})=4/36$.

$P(10)=p(X=10)=p(\{(4,6),(5,5),(6,4)\})=3/36$.

$P(11)=p(X=11)=p(\{(5,6),(6,5)\})=2/36$.

$P(12)=p(X=12)=p(\{(6,6)\})=1/36$.

x_i	$p_i=p(X=x_i)$
2	$1/36$
3	$2/36$
4	$3/36$
5	$4/36$
6	$5/36$
7	$6/36$
8	$5/36$
9	$4/36$
10	$3/36$
11	$2/36$
12	$1/36$
	1



Unha representación gráfica da función de probabilidade é a que se ve ao carón.

Pódese comprobar que a altura que acadan os rectángulos debuxados sobre os números son proporcionais ás súas probabilidades.

É interesante comparar a imaxe que ofrece esta gráfica coa do exemplo 224.

226. Un lote de 100 lámpadas contén 10 defectuosas. O minorista decide tomar dúas lámpadas aleatoriamente, e se ningunha das dúas é defectuosa entón acepta o lote. Definimos a variable aleatoria X como o número de lámpadas defectuosas nunha selección aleatoria de lámpadas. Obtén a distribución de probabilidades da variable aleatoria X, e indica a probabilidade de que o minorista acepte o lote.

Solución:

O experimento aleatorio de selección de dúas lámpadas ao chou define os sucesos elementais seguintes:

L_1: Primeira lámpada defectuosa; L_2: Segunda lámpada defectuosa;

$\bar{L}_1$: Primeira lámpada non defectuosa; $\bar{L}_2$: Segunda lámpada non defectuosa.

Ao considerar a selección conxunta das lámpadas, o espazo mostral xerado por ese experimento aleatorio contén catro sucesos mutuamente excluíntes e forman un sistema completo de sucesos.

As probabilidades de cada suceso, son:

$$p(L_1 \cap L_2) = p(L_1)\cdot p(L_2/L_1) = \frac{10}{100}\cdot\frac{9}{99} = 0.0091.$$

$$p(L_1 \cap \bar{L}_2) = p(L_1)\cdot p(\bar{L}_2/L_1) = \frac{10}{100}\cdot\frac{90}{99} = 0.0909.$$

$$p(\bar{L}_1 \cap L_2) = p(\bar{L}_1)\cdot p(L_2/\bar{L}_1) = \frac{90}{100}\cdot\frac{10}{99} = 0.0909.\quad p(\bar{L}_i \cap \bar{L}_2) = p(\bar{L}_1)\cdot p(\bar{L}_2/\bar{L}_1) = \frac{90}{100}\cdot\frac{89}{99} = 0.8091.$$

Sucesos	Variable aleatoria X	Probabilidades
$L_1 \cap L_2$	2	0.0091
$L_1 \cap \bar{L}_2$	1	0.0909
$\bar{L}_1 \cap L_2$	1	0.0909
$\bar{L}_i \cap \bar{L}$	0	0.8091

Consecuentemente, as probabilidades con que a variable aleatoria X toma os diferentes valores serán as seguintes:

$P(0) = p(X=0) = p_1 = 0.8091$.

$P(1) = p(X=1) = p_2 = 0.0909 + 0.0909 = 0.1818$.

$P(2) = p(X=2) = p_3 = 0.0091$.

x	$P(x)$
0	0.8091
1	0.1818
2	0.0091

Así, na táboa superior aparece a distribución de probabilidade $P(x)$ da variable aleatoria X, onde aparecen os diferentes valores $x \in X$ e as súas probabilidades $P(x)$.

A probabilidade de que o minorista acepte o lote de 100 lámpadas é $p(X=0) = p_1 = 0.8091$.

227. Sexa experimento consistente en lanzar 240 veces un dado equilibrado, e supoñamos que obtivemos os resultados adxunts. Constrúe e representa a distribución de frecuencias relativas e a distribución de probabilidades.

Cara	1	2	3	4	5	6
Nº de veces	40	39	42	38	42	39

Solución:

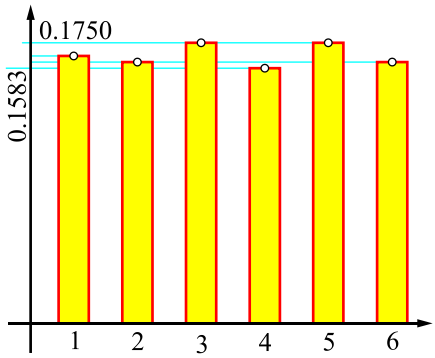
Construímos as táboas de distribución de frecuencias absolutas e relativa dos resultados obtidos, e tamén os resultados esperados segundo o cálculo de probabilidades:

Resultados obtidos		
Lado	frec. absoluta	frec. relativa
1	40	0.1667
2	39	0.1625
3	42	0.1750
4	38	0.1583
5	42	0.1750
6	39	0.1625
	240	1

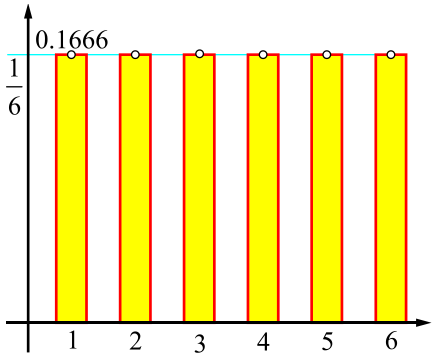
Datos esperados		
Lado	Nº veces	Probabilidade
1	40	$1/6$
2	40	$1/6$
3	40	$1/6$
4	40	$1/6$
5	40	$1/6$
6	40	$1/6$
	240	1

Representando graficamente estas táboas tense:

Distribución de frecuencias



Distribución de probabilidades



Fixándonos nos resultados da dereita observamos que a cada valor da variable aleatoria facémoslle corresponder a súa probabilidade. A gráfica da esquerda é a da *distribución de frecuencias* e a gráfica da dereita representa a *función de probabilidade* ou *distribución de probabilidade*.

Debemos notar que unha función ou distribución de probabilidade é análoga a unha distribución de frecuencias relativas. Así *podemos pensar nas distribucións de probabilidade como formas teóricas ou ideais no límite de distribucións de frecuencias relativas cando o número de observacións é moi grande*.

- Por iso podemos pensar nas distribucións de probabilidade como se foran distribucións de *poboacións*, mentres que as distribucións de frecuencias relativas son distribucións de *mostras* desa poboación.

3.1. Representacións da función de probabilidade dunha variable aleatoria

A función de probabilidade dunha variable aleatoria discreta pode expresarse de xeito:

- *Tabular*.
- *Alxébrica* ou *funcional*.
- *Gráfica*.

A forma *tabular* consiste en expresar en forma de táboa unha lista dos valores posibles da variable aleatoria X e as correspondentes probabilidades $P(x)$, como se ve na táboa adxunta correspondente ao exemplo 226.

x	$P(x)$
0	0.8091
1	0.1818
2	0.0091

A forma *alxébrica* ou *funcional* preséntase cando é posible escribir unha función na forma dunha ecuación, de tal maneira que para cada valor da variable aleatoria se poida obter a súa probabilidade.

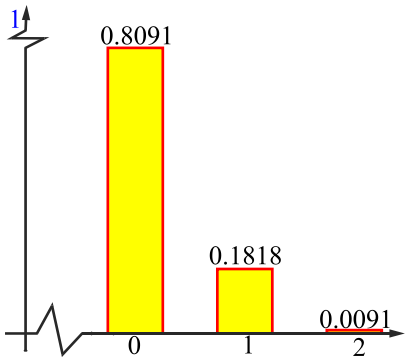
Para o exemplo 226 temos a forma alxébrica adxunta.

$$P(x) = p(X = x) = \frac{\binom{10}{x}\binom{100-10}{2-x}}{\binom{100}{2}}$$

con $x = 0,1,2$

A forma de representación mediante *gráficas* ou *diagramas de barras*, nas que sobre o eixe de abscisas levamos os diferentes valores de $x \in X$ e sobre o eixe de ordenadas, as probabilidades $P(x)$.

Para o exemplo 226 temos a representación gráfica adxunta.



Se X é unha variable aleatoria discreta e desexamos determinar a probabilidade de que X sexa maior ou igual ca un certo valor a e menor ou igual ca un valor b, sendo $a \le b$, só temos que sumar as probabilidades correspondentes aos valores de X comprendidos entre a e b; é dicir:

$$p(a \le X \le b) = \sum_{x=a}^{x=b} p(X = x) = \sum_{x=a}^{x=b} P(x) = \sum_{x=a}^{x=b} p_x$$

228. Para os datos do exemplo 226, calcula $p(0 \le X < 2)$.

Solución:

$$p(0 \le X < 2) = p(0 \le X \le 1) = \sum_{x=0}^{x=1} p(X = x) = p(X = 0) + p(X = 1) = 0.8091 + 0.1818 = 0.9909 .$$

3.2. Función de distribución (ou función de distribución acumulativa)

Sexa X unha variable aleatoria de tipo discreto que toma un número finito ou infinito numerable de valores x_1, x_2, x_3, …, x_r, e cuxa función de probabilidade é $P(x)$.

- Chámase *función de distribución acumulativa* (ou simplemente *función de distribución*) da variable aleatoria X, e denotarémola por $F(x)$, como a probabilidade de que a variable aleatoria X tome valores menores ou iguais ca x; é dicir:

$$F(x) = p(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(x_i) = \sum_{x_i = x_1}^{x} p(X = x_i)$$

- *Representa* a suma das probabilidades puntuais ata o valor x inclusive da variable aleatoria X.

A función de distribución dunha variable aleatoria discreta verifica:

- $0 \le F(x) \le 1, \forall x$.
- É non decrecente, é dicir, $x_i \le x_j \to F(x_i) \le F(x_j)$.

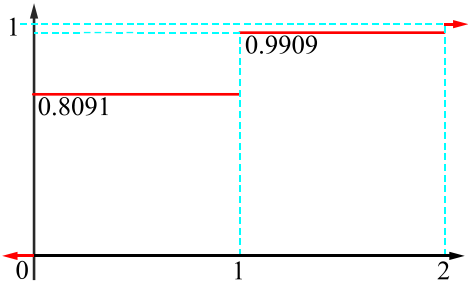
229. Para os datos do exemplo 226 calcula a función de distribución e fai a representación gráfica.

Solución:

Valores de X: x	Función de probabilidade: $P(x) = p(X = x)$	Función de distribución (acumulativa): $F(x) = p(X \le x)$
0	0.8091	$F(0) = p(X \le 0) = 0.8091$
1	0.1818	$F(1) = p(X \le 1) = 0.8091 + 0.1818 = 0.9909$
2	0.0091	$F(2) = p(X \le 2) = 0.8091 + 0.1818 + 0.0091 = 1$

Así a función de distribución para calquera valor de x quedaría da seguinte forma:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.8091, & 0 \le x < 1 \\ 0.9909, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$



É unha función escalonada.

Unha variable aleatoria discreta está totalmente caracterizada pola *función de probabilidade* ou *distribución de probabilidade* $P(x)$: $P(x) = p(X = x)$ e pola *función de distribución* $F(x)$: $F(x) = p(X \le x)$.

3.3. Media (esperanza matemática) e varianza dunha variable aleatoria discreta

Cando se estudaba Estatística Descritiva ocupabámonos da información correspondente a unha variable estatística, obtendo a correspondente distribución de frecuencias, e unha serie de medidas descritivas tales como a media, mediana, moda, varianza, … que resumían a información sobre a variable estatística en cuestión, podendo establecer comparación entre diferentes poboacións utilizando unicamente as súas características descritivas.

Unha situación análoga atopámola agora, pois toda a información sobre unha variable aleatoria X está especificada pola súa función de probabilidade $P(x)$ ou na súa función de densidade, segundo sexa unha variable aleatoria discreta ou continua, respectivamente.

Seguindo un certo paralelismos coa Estatística Descritiva, estudaremos para variables aleatorias discretas —e posteriormente continuas— algunhas características das mesmas: media, varianza, …

3.3.1. Valor esperado dunha variable aleatoria unidimensional

O concepto de *valor esperado* ou *esperanza matemática* dunha variable aleatoria é un dos máis importantes no estudio das propiedades das distribucións de probabilidade.

Co fin de entender de maneira fácil este concepto consideremos o seguinte xogo:

230. Lánzase un dado ben equilibrado. Se aparece un 1 o xogador gaña 10 €. Se aparece 2, 3, 4, ou 5 o xogador perde 3 €. Se aparece un 6 o xogador gaña 2 €.

Deséxase saber se o xogo é equitativo ou xusto, é dicir, se nunha larga serie de xogadas un xogador non gaña máis ca outro.

Solución:

Para resolver ese problema teríamos que realizar o xogo un gran número de veces e ver que ocorre, pero a realización do xogo un gran número de veces levaría moito tempo.

Podemos calcular a equidade do xogo da seguinte forma:

Sexa X a cantidade que gaña un xogador no xogo, sendo negativa cando perde. Esta variable aleatoria, X, pode tomar os seguintes valores:

$X = 10 \rightarrow \frac{1}{6}$ das veces

$X = -3 \rightarrow \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ das veces

$X = 2 \rightarrow \frac{1}{6}$ das veces

Se calculamos a *media ponderada* dos posibles resultados utilizando como ponderación a proporción de veces que se presenta un resultado particular, temos que o *resultado ponderado* será:

$$10 \cdot \frac{1}{6} + (-3) \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} = 0.000$$

E segundo o resultado podemos dicir que non esperamos nin gañar nin perder neste xogo, é dicir, que a ganancia esperada por xogo é cero.

Así, considerando este xogo, que da lugar a unha variable aleatoria discreta X, cuxa función de probabilidade é:

$$p(x_i) = p(X = x_1) = \begin{cases} \frac{1}{6}, \text{ se } x_i = 10 \\ \frac{2}{3}, \text{ se } x_i = -3 \\ \frac{1}{6}, \text{ se } x_i = 2 \\ 0 \text{ no resto} \end{cases}$$

E se designamos por $E(X)$ a ganancia esperada, temos que:

$$E(X) = 10 \cdot \frac{1}{6} + (-3) \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} = 0$$

Chámase *media* ou *esperanza matemática* dunha variable aleatoria X, que toma os valores x_1, x_2, …, x_n con probabilidades p_1, p_2, …, p_n, respectivamente ao valor:

$$E(X) \equiv \mu = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \cdots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

Chámase *varianza* dunha variable aleatoria *x*, que toma os valores x_1, x_2, …, x_n con probabilidades p_1, p_2, …, p_n, ao cadrado da desviación típica, é dicir:

$$\sigma^2 = \sum x_i^2 \cdot p_i - \mu^2 = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + \cdots + x_n^2 \cdot p_n - \mu^2$$

Ou tamén

$$\sigma^2 = \sum (x_i - \mu)^2 \cdot p_i = (x_1 - \mu) \cdot p_i + (x_2 - \mu) \cdot p_2 + \cdots + (x_n - \mu) p_n$$

Chámase *desviación típica* dunha variable aleatoria *x*, que toma os valores x_1, x_2, …, x_n con probabilidades p_1, p_2, …, p_n, respectivamente ao valor

$$\sigma = \sqrt{\sum x_i^2 \cdot p_i - \mu^2} = \sqrt{x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + \cdots + x_n^2 \cdot p_n - \mu^2}$$

Ou tamén

$$\sigma = \sqrt{\sum (x_i - \mu)^2 \cdot p_i} = \sqrt{(x_1 - \mu) \cdot p_i + (x_2 - \mu) \cdot p_2 + \cdots + (x_n - \mu) p_n}$$

É importante, ás veces, distinguir entre a media, desviación típica e varianza dunha *distribución experimental* e a media e a varianza dunha *distribución teórica*. Para iso empregaremos os símbolos:

- $\bar{X}$, s^2 e s para unha distribución experimental.
- μ , σ^2 e σ para unha distribución teórica.

231. Cos datos do exemplo 227, calcula a media e a varianza.

Cara	1	2	3	4	5	6
Nº veces	40	39	42	38	42	39

Solución:

Distribución experimental				
x_i	h_i	$x_i \cdot h_i$	x_i^2	$x_i^2 h_i$
1	0.1667	0.1667	1	0.1667
2	0.1625	0.3250	4	0.6500
3	0.1750	0.5250	9	1.5750
4	0.1583	0.6332	16	2.5328
5	0.1750	0.8750	25	4.3750
6	0.1625	0.9750	36	5.8500
	1	3.4999		15.1495

Distribución teórica				
x_i	p_i	$x_i p_i$	x_i^2	$x_i^2 p_i$
1	$1/6$	$1/6$	1	$1/6$
2	$1/6$	$2/6$	4	$4/6$
3	$1/6$	$3/6$	9	$9/6$
4	$1/6$	$4/6$	16	$16/6$
5	$1/6$	$5/6$	25	$25/6$
6	$1/6$	$6/6$	36	$36/6$
	1	$21/6$		$91/6$

- A *media aritmética* da distribución experimental é: $\bar{x} = \sum x_i \cdot h_i = 3.4999$.
- A *media aritmética* da distribución teórica é: $\mu = \sum x_i \cdot p_i = \frac{21}{6} = 3.5$.
- A *varianza* da distribución experimental é $s^2 = \sum x_i^2 \cdot h_i - \bar{x}^2 = 15.1495 - 3.4999^2 = 2.9002$.
- A *varianza* da distribución teórica é: $\sigma^2 = \sum x_i^2 \cdot p_i - \mu^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{35}{12} = 2.91667$.

232. Calcula a media, a desviación típica e a varianza dunha variable que ten a función de probabilidade adxunta:

x	1	3	4
p	0.3	0.4	0.3

Solución:

Fórmase a táboa adxunta:

x_i	p_i	$x_i p_i$	$x_i^2 p_i$
1	0.3	0.3	0.30
3	0.4	1.2	3.60
4	0.3	1.2	4.80
	1	2.7	8.7

- *Media*: $E(X) \equiv \mu = \sum x_i \cdot p_i = 2.7$.
- *Desviación típica*: $\sigma = \sqrt{\sum x_i^2 \cdot p_i - \mu^2} = \sqrt{8.7 - 2.7^2} = 1.18743$.
- *Varianza*: $\sigma^2 = \sum x_i^2 \cdot p_i - \mu^2 = 8.7 - 2.7^2 = 1.41$.

233. A función de probabilidade dunha variable aleatoria discreta ven dada pola táboa adxunta. Sabendo que $p(x \le 2) = 0.7$ e que $p(x \ge 2) = 0.75$, calcula a esperanza matemática, a desviación típica e a varianza.

x	0	1	2	3	4
p	0.1	a	b	c	0.2

Solución:

En primeiro lugar hai que calcular os valores de a , b e c , tendo en conta que a suma de tódalas probabilidades é igual a unidade.

Ademais $p(x \le 2) = 0.7 \rightarrow 0.1 + a + b = 0.7$ e $p(x \ge 2) = 0.75 \rightarrow b + c + 0.2 = 0.75$.

Así tense o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 0.1 + a + b + c + 0.2 = 1 \\ 0.1 + a + b = 0.7 \\ b + c + 0.2 = 0.75 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 0.15 \\ b = 0.45 \\ c = 0.1 \end{cases}$$

x_i	p_i	$x_i p_i$	$x_i^2 p_i$
0	0.1	0	0
1	0.15	0.15	0.15
2	0.45	0.9	1.8
3	0.1	0.3	0.9
4	0.2	0.8	3.2
	1	2.15	6.05

Para o cálculo dos parámetros pedidos formamos a tábo adxunta.

- *Esperanza matemática*: $E(X) \equiv \mu = \sum x_i \cdot p_i = 2.15$.
- *Desviación típica*: $\sigma = \sqrt{\sum x_i^2 \cdot p_i - \mu^2} = \sqrt{6.05 - 2.15^2} = \sqrt{1.4275} = 1.19478$.
- *Varianza*: $\sigma^2 = \sum x_i^2 \cdot p_i - \mu^2 = 6.05 - 2.15^2 = 1.4275$.

234. Calcula a media, desviación típica e varianza da función de probabilidade estudada no exemplo 224.

Solución:

x	p_i	$x_i p_i$	$x_i^2 p_i$
1	$1/36$	$1/36$	$1/36$
2	$3/36$	$6/36$	$12/36$
3	$5/36$	$15/36$	$45/36$
4	$7/36$	$28/36$	$112/36$
5	$9/36$	$45/36$	$225/36$
6	$11/36$	$66/36$	$396/36$
	1	$161/36$	$791/36$

- *Esperanza matemática*: $\mu = \sum x_i \cdot p_i = \frac{161}{36} = 4.47\widehat{2}$.
- *Desviación típica*: $\sigma = \sqrt{\sum x_i^2 \cdot p_i - \mu^2} = \sqrt{\frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2} = \sqrt{\frac{2555}{1296}} = 1.40408$.
- *Varianza*: $\sigma^2 = \sum x_i^2 \cdot p_i - \mu^2 = \frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2 = \frac{2555}{1296} = 1.97145$.

235. Para o exemplo 225, obtén μ e σ.

Solución:

Cóllense os datos do exemplo 225 e engádense dúas columnas para facilitar os cálculos.

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
2	$1/36$	$2/36$	$4/36$
3	$2/36$	$6/36$	$18/36$
4	$3/36$	$12/36$	$48/36$
5	$4/36$	$20/36$	$100/36$
6	$5/36$	$30/36$	$180/36$
7	$6/36$	$42/36$	$294/36$
8	$5/36$	$40/36$	$320/36$
9	$4/36$	$36/36$	$324/36$
10	$3/36$	$30/36$	$300/36$
11	$2/36$	$22/36$	$242/36$
12	$1/36$	$12/36$	$144/36$
		$252/36$	$1974/36$

- *Media*: $\mu = \sum x_i \cdot p_i = \frac{252}{36} = 7$.
- *Desviación típica*: $\sigma = \sqrt{\sum x_i^2 \cdot p_i - \mu^2} = \sqrt{\frac{1974}{36} - 7^2} = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2.41522945$.

236. Completa a táboa e calcula os parámetros σ e μ.

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0.1	0.1	0.25	0.35	

Solución:

x_i	p_i	$x_i p_i$	$x_i^2 p_i$
1	0.10	0.10	0.10
2	0.10	0.20	0.40
3	0.25	0.75	2.25
4	0.35	1.40	5.60
5	0.20	1.00	5.00
	1	3.45	13.35

Empezamos calculando $p(5)$: $p(5) = 1 - (0.10 + 0.10 + 0.25 + 0.35) = 1 - 0.80 = 0.20$.

Completamos a táboa para facilitar os cálculos.

- *Media*: $\mu = \sum x_i \cdot p_i = 3.45$.
- *Desviación típica*: $\sigma = \sqrt{\sum x_i^2 \cdot p_i - \mu^2} = \sqrt{13.35 - 3.45^2} = \sqrt{1.4475} \approx 1.20312$.

237. Nunha bolsa hai 20 boas numeradas: 9 con un ①, 5 con un ② e 6 con un ③. Sácase unha bola ao chou. Constrúe a distribución de probabilidade e atopa os parámetros μ e σ.

Solución:

x_i	p_i	$x_i p_i$	$x_i^2 p_i$
①	0.45	0.45	0.45
②	0.25	0.50	1.00
③	0.30	0.90	2.70
	1	1.85	4.15

$p(1)=\frac{9}{20}=0.45$; $p(2)=\frac{5}{20}$, $p(3)=\frac{6}{20}=0.30$.

- $\mu=\sum x_i\cdot p_i=1.85$.
- $\sigma=\sqrt{\sum x_i^2\cdot p_i-\mu^2}=\sqrt{4.15-1.85^2}=\sqrt{0.7275}\approx 0.852936$.

238. Unha compañía de seguros quere introducir unha nova póliza para cubrir un determinado tipo de sinistro pola cal pagaría 1000000 €. Da súa experiencia e arquivos, o actuario da compañía sabe que ese tipo de sinistro se produce en 6 de cada 10000 vehículos ao ano. A compañía quere saber a cantidade c que debe cobrar pola prima dese seguro de maneira que a compañía non gane nin perda nada ao final do ano en que a promocionan.

Solución:

Sexa X a ganancia que a compañía ten pola venda de cada seguro. Para obter a cantidade c que debe cobrar pola prima se non quere ter beneficio nin perda nese tipo de seguro terase que verificar que a ganancia esperada —que será función de c— sexa igual a cero $E(X)=0$, é dicir:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot p(x_i)=0$$

Obtemos como segue a distribución de probabilidade da variable aleatoria X:

— Se o sinistro que cubre a póliza *non ocorre* a compañía xera o importe total da prima, é dicir, $X=c$ € e a probabilidade de que isto ocorra é $\frac{9994}{10000}$.

— Se o sinistro que cubre a póliza *ocorre* a compañía ten que pagar, é dicir, terá unha perda de $X=c-1000000$ €, e a probabilidade de que isto ocorra é de $\frac{6}{10000}$.

A distribución de probabilidade é: $p(x)=p(X=x)=\begin{cases}\frac{9994}{10000}, \text{ se } x=c\\ \frac{6}{10000}, \text{ se } x=c-1000000\end{cases}$

Substituíndo na expresión do valore esperado e igualando a cero, tense:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{2}x_i\cdot p(x_i)=c\cdot\frac{9994}{10000}+(c-1000000)\cdot\frac{6}{10000}=c-600;\ c-600=0\rightarrow c=600\text{€}.$$

Así a compañía tería que cobrar 600 € de prima, e a súa ganancia media, se fai un número grande de pólizas deste tipo, será cero.

239. Un determinado concesionario de coches, ante a forte competencia, decidiu rebaixar os prezos co fin de aumentar as vendas. O director comercial estimou a distribución de probabilidade adxunta do número total de coches X que se venderán a vindeira semana despois de rebaixar os prezos.

x	0	1	2	3	4
$p(x)$	0.05	0.15	0.35	0.25	0.20

Obtén o número medio e a desviación típica do número de coches que espera vender.

Solución:

$$\mu=E(X)=\sum_{i=1}^{5}x_i\cdot p(x_i)=0\cdot 0.05+1\cdot 0.15+2\cdot 0.35+3\cdot 0.25+4\cdot 0.20=2.4.$$

$$\sigma_X^2=\sum x_i^2\cdot p_i-\mu^2=0\cdot 0.05+1^2\cdot 0.15+2^2\cdot 0.35+3^3\cdot 0.25+4^2\cdot 0.20-2.4^2=1.24.$$

$$\sigma_X=\sqrt{1.24}\approx 1.11355.$$

240. Calcula a esperanza matemática da magnitude aleatoria discreta X dada polas leis de distribución adxuntas:

240.1.	X	-4	6	10
	p	0.2	0.3	0.5
240.2.	X	0.21	0.54	0.61
	p	0.1	0.5	0.4

Solución:

240.1. $E(X)=-4\cdot 0.2+6\cdot 0.3+10\cdot 0.5=6$.

240.3. $E(X)=0.21\cdot 0.1+0.54\cdot 0.5+0.61\cdot 0.4=0.535$.

3.3.2. Valor esperado dunha función dunha variable aleatoria discreta

Sexa X unha variable aleatoria de tipo discreto, con función de probabilidade $p(x_i)$ e sexa $g(X)$ unha función da variable aleatoria X. Defínese

$$E(g(X))=\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,p(x_i)$$

241. Un axente de seguros de vida recibe un salario mensual de 1000 euros máis comisións de 90 € por cada seguro que fai. Se o número de seguros de vida que fai nun mes e unha variable aleatoria X coa función de probabilidade adxunta, calcula o salario mensual esperado.

$$p(x_i)=\begin{cases}\frac{1}{10}, & x=0\\ \frac{1}{5}, & x=1\\ \frac{2}{5}, & x=2\\ \frac{1}{5}, & x=3\\ \frac{1}{10}, & x=4\\ 0 \text{ no resto}\end{cases}$$

Solución:

Xa que o salario mensual é unha función $g(X)$ do número de seguros X que fai, é dicir:

$$g(X)=1000+90\cdot X$$

Teremos que calcular o valor esperado da función:

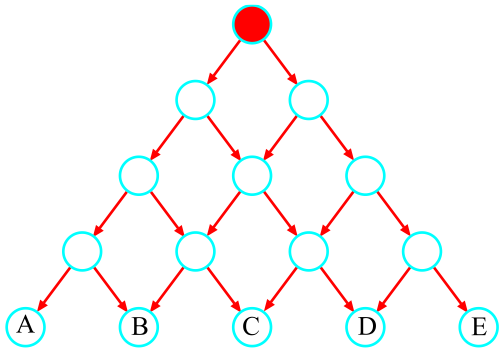
$$1000+90\cdot X$$

$$E(g(X))=E(1000+90X)=$$

$$=(1000+90\cdot 0)\cdot\frac{1}{10}+(1000+90\cdot 1)\cdot\frac{1}{5}+(1000+90\cdot 2)\cdot\frac{2}{5}+(1000+90\cdot 3)\cdot\frac{1}{5}+(1000+90\cdot 4)\cdot\frac{1}{10}=$$

$$=1180\ €/\text{mes}.$$

3.4. Distribución binomial (función). Idea intuitiva



242. Consideremos o seguinte xogo:

Unha ficha pode avanzar dende o punto vermello da cúspide nas direccións indicadas polas frechas; avanzará cara a esquerda se o resultado de lanzar un dado é 1, 2, 3 ou 4, e avanzará cara a dereita se o resultado é 5 ou 6.

Pídese:

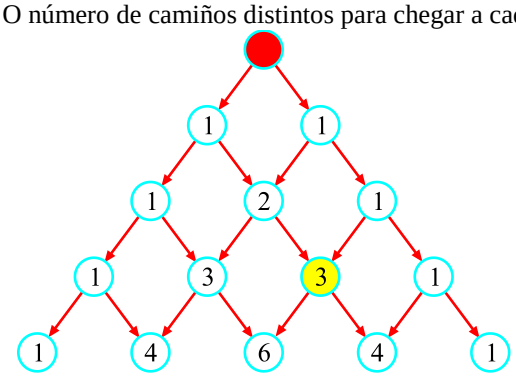
242.1. Cantos camiños pode seguir a ficha ata o remate?

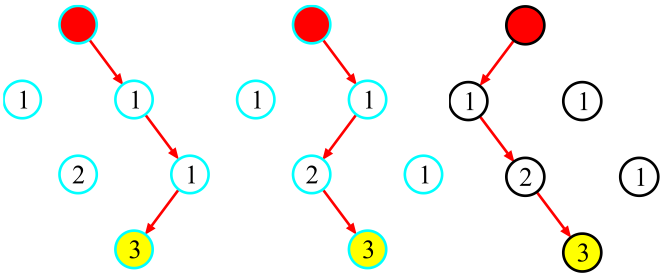
242.2. Cal é a probabilidade de cada un deles?

242.3. Cal é a probabilidade de que a ficha chegue a cada un dos círculos sinalados con letras despois de catro xogadas?

Solución:

242.1. O número de camiños distintos para chegar a cada un dos círculos é o que se ve na figura seguinte.



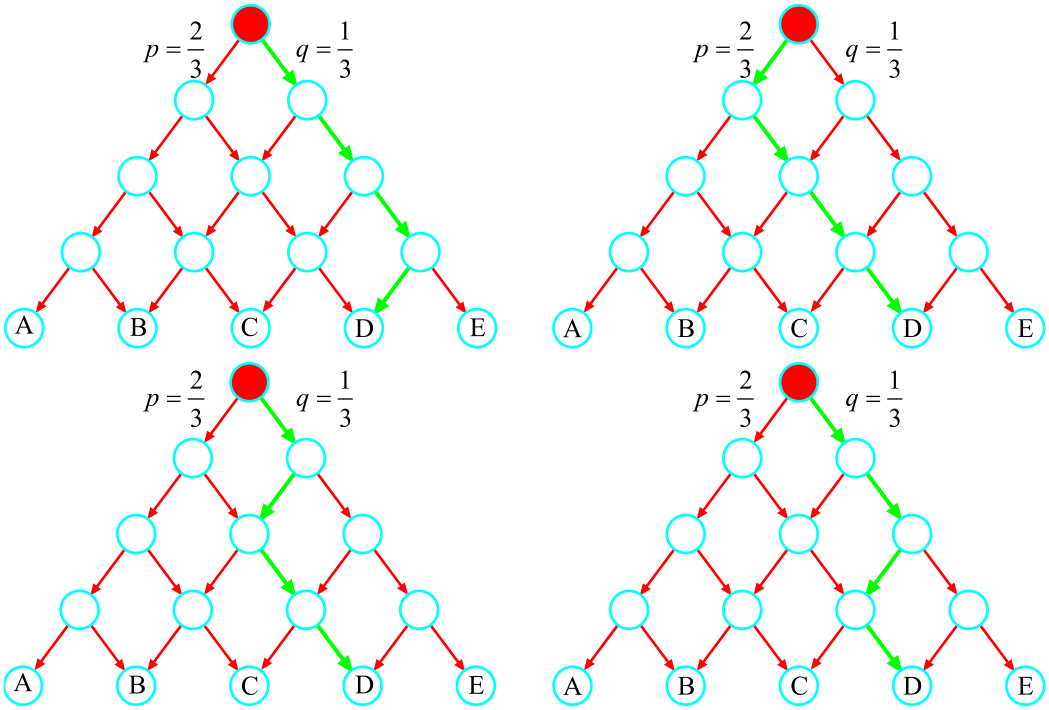


Por exemplo, para chegar a casela amarela téñense os camiños indicados á dereita. Este triángulo é idéntico ao triángulo de Pascal.

Polo tanto, o número total de camiños diferentes para chegar á fila marcada con letras é $1+4+6+4+1=16$.

242.2. A probabilidade de tomar calquera camiño da esquerda é $p=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ e a da dereita é $q=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

A probabilidade de cada camiño dependerá de cantas veces se elixa o camiño da esquerda e o camiño da dereita; por exemplo, tódolos camiños que levan a D están formados *por tres avances á dereita e un á esquerda*, como se ve nas imaxes seguintes:



Polo tanto, a probabilidade do camiño sinalado que nos leva a D é:

$$p(\text{camiño para ir a } D)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{2}{3}.$$

Calculamos, segundo o visto as probabilidades dun só camiño para chegar aos restantes destinos:

$$p(\text{camiño para ir a } A)=\left(\frac{2}{3}\right)^4;\ p(\text{camiño para ir a } B)=\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3};\ p(\text{camiño para ir a } C)=\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2;$$

$$p(\text{camiño para ir a } E)=\left(\frac{1}{3}\right)^4.$$

242.3. A probabilidade pedida é igual á dun camiño polo número de camiños:

$$p(\text{chegar a } A)=1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4;\ p(\text{chegar a } B)=4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right),\ p(\text{chegar a } C)=6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2;\ p(\text{chegar a } D)=4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3,$$

$$p(\text{chegar a } E)=1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4.$$

3.4.1. Variable aleatoria da distribución de Bernoulli

Supoñamos que un experimento aleatorio ten as seguintes características:

① En cada proba do experimento *só son posibles dous resultados*, o suceso A e o $\bar{\mathrm{A}}$. Ao suceso A chamarémoslle *éxito* e ao suceso $\bar{\mathrm{A}}$ chamarémoslle *fracaso*. É un *experimento dicotómico*.

② *A probabilidade do suceso* A *é constante* e, polo tanto, non varía dunha proba a outra. Representemos $p=p(\mathrm{A})$ a probabilidade do suceso A e por $q=p(\bar{\mathrm{A}})$ a probabilidade de $\bar{\mathrm{A}}$. Evidentemente $\boxed{q=1-p}$.

- A este tipo de experimentos aleatorios chámaselles *experimentos de Bernoulli* ou *probas de Bernoulli*. Tamén se lles chama *experimentos dicotómicos*.

Asociada a un experimento aleatorio de Bernoulli está a *variable aleatoria de Bernoulli* X definida da seguinte maneira:

$$X = \begin{cases} 0 \text{ se ocorre o suceso } \overline{\mathrm{A}} \\ 1 \text{ se ocorre o suceso A} \end{cases}$$

A función de probabilidade, ou *distribución de probabilidade* da variable aleatoria X pode expresarse como:

$$p(X=0) = p(\overline{\mathrm{A}}) = 1-p$$
$$p(X=1) = p(\mathrm{A}) = p$$

Dise que unha variable aleatoria X segue unha *distribución de Bernoulli* de parámetro p se a súa función de probabilidade ou distribución de probabilidade é:

$$P(x) = p(X=x) = p^x \cdot (1-p)^{1-x} \equiv p^x \cdot q^{1-x},\ x = 0,1$$

Abreviadamente indicarase por:

- $X \to B(p)$.
- $X \to B(1,p)$.

A función de distribución dunha distribución de Bernoulli é:

$$F(x) = p(X \le x) = \begin{cases} 0,\ x<0 \\ 1-p,\ 0 \le x \le 1 \\ 1,\ x \ge 1 \end{cases}$$

243. Son experimentos de Bernoulli ou dicotómicos:

243.1. Lanzar unha moeda: $A =$ Cara , $\overline{A} =$ Cruz .

$p = p(\text{Cara}) = \frac{1}{2}$; $q = p(\text{Cruz}) = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$.

243.2. Lanzar un dado e ver se sae 5 ou non: $A =$ Cinco $= \{5\}$, $\overline{A} =$ Non cinco $= \{1,2,3,4,6\}$.

$p = p(\text{Cinco}) = \frac{1}{6}$; $q = p(\text{Non cinco}) = \frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6}$.

243.3. Sacar unha carta dunha baralla española e ver se é figura: $A = \text{Figura} = \{\text{Sota,Cabalo,Rei}\}$,

$\overline{A} =$ Non figura $= \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

$p = p(\text{Figura}) = \frac{3 \cdot 4}{40} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 0.3$; $p(\text{Non figura}) = \frac{7 \cdot 4}{40} = \frac{7}{10} = 0.7 = 1 - 0.3$.

243.4. Temos un montón de parafusos fabricados por unha máquina que, por termo medio, produce un 2% de parafusos defectuosos. Dos parafusos fabricados por esa máquina extráese un ao chou. $A =$ Defectuoso , $\overline{A} =$ Non defectuoso .

$p = p(\text{Defectuoso}) = 0.02$; $q = p(\text{Non defectuosos}) = 0.98 = 1 - 0.02$

3.4.2. Media e desviación típica da distribución de Bernoulli

A función de probabilidade é:

Valor da variable: x_i	1	0
Probabilidade: p_i	p	$q = 1-p$

Con estes datos, a media, desviación típica e varianza son:

- A *esperanza matemática* será: $\mu = \sum x_i \cdot p_i = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$.
- A *varianza* será: $\sigma^2 = \sum (x_i - \mu)^2 \cdot p_i = (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot q = p(1-p) = p \cdot q$.
- A *desviación típica* será: $\sigma = \sqrt{\sum (x_i - \mu)^2 \cdot p_i} = \sqrt{(1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot q} = \sqrt{(1-2p+p^2) \cdot p + p^2(1-p)} =$
  $= \sqrt{p - 2p^2 + p^3 + p^2 - p^3} = \sqrt{p(1-p)} = \sqrt{p \cdot q}$.

244. Un axente de seguros dedicados á venda de seguros de vida, fai visitas a posibles clientes co fin de contratar un seguro de vida. Sábese da súa traxectoria como axente que no 60% das visitas ten éxito e contrata un seguro.

244.1. Define a variable aleatoria asociada a este experimento e a función de probabilidade.

244.2. Obtén a media.

244.3. Obtén a varianza.

Solución:

O experimento aleatorio ou proba de Bernoulli será realizar a visita a un posible cliente, xa que os dous posibles resultados son:

— Conseguir que contrate o seguro, suceso éxito A.

— Non conseguir que contrate o seguro, suceso fracaso $\overline{\mathrm{A}}$.

244.1. A variable aleatoria X asociada ao experimento toma os valores:

$$\begin{cases} X=1 \text{ se fai o seguro, suceso A} \\ X=0 \text{ se non fai o seguro, suceso } \overline{\mathrm{A}} \end{cases}$$

A función de probabilidade é:

Valor da variable: x_i	$p(X=1)$	$p(X=0)$
Probabilidade: p_i	$p=0.6$	$q=0.4$

244.2. A media é $E(X)=p=0.6$.

244.3. A varianza é $\sigma^2=p(1-p)=0.6\cdot 0.4=0.24$.

3.4.3. Función de probabilidade da distribución binomial

Unha xeneralización importante da distribución de Bernoulli obtense cando o experimento ou proba de Bernoulli se repite varias veces. Así, no que segue consideraranse n repeticións independentes dunha proba de Bernoulli.

No exemplo 242 acercámonos intuitivamente á idea de función de probabilidade da distribución binomial.

— Supoñamos un experimento aleatorio cuxos resultados só poden ser o suceso $\mathrm{A}=$ «éxito» e o suceso $\overline{\mathrm{A}}=$ «fracaso», con probabilidades p e $q=1-p$, respectivamente.

— Asóciase a cada unha das n repeticións do experimento ou proba de Bernoulli unha variable aleatoria X_i tal que

$$X_i=\begin{cases} 1 \text{ cando na repetición } i-\text{ésima ocorre o suceso } A \\ 0 \text{ cando na repetición } i-\text{ésima ocorre o suceso } \overline{A} \end{cases},\ i=1,2,\ldots,n$$

— Defínese a variable aleatoria $X=X_1+X_2+\cdots+X_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$.

Entón, como cada X_i pode tomar o valor 1 ou 0 dependendo de se ocorre o suceso éxito ou o fracaso na repetición *i*-ésima, a variable aleatoria X tomará valores enteiros comprendidos entre 0 e n, e indicaranos o número de éxitos nas n repeticións independentes do experimento ou proba de Bernoulli, e a esta variable aleatoria X chámaselle *variable aleatoria binomial* con parámetros n e p.

Defínese a *variable aleatoria binomial* X como o número de éxitos que teñen lugar cando se realiza n repeticións independentes dun experimento ou proba de Bernoulli.

É importante destacar que se repite n veces o mesmo experimento. É dicir, que nas sucesivas repeticións teñen que darse as mesmas condicións e, polo tanto, a probabilidade de éxito ha de ser a mesma en todos os casos.

Para obter a función de probabilidade da variable binomial, teremos que calcular a probabilidade de que a variable aleatoria X tome os diferentes valores $x=0,1,\ldots,n$, é dicir, $p(X=r)$. Para iso realizamos n probas de Bernoulli e desexamos saber a probabilidade de obter r éxitos nas n probas.

① Consideremos un dos casos nos que se obteñen r éxitos nas n probas. Sexa o suceso:

$$B=\underbrace{\mathrm{A}\cap\mathrm{A}\cap\cdots\cap\mathrm{A}}_{r \text{ éxitos}}\cap\underbrace{\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{A}}\cap\cdots\cap\overline{\mathrm{A}}}_{(n-r) \text{ fracasos}}$$

A probabilidade deste suceso, tendo en conta a independencia en n probas sucesivas, será:

$$p(B)=\underbrace{p(\mathrm{A})\cdot p(\mathrm{A})\cdot\cdots\cdot p(\mathrm{A})}_{r \text{ éxitos}}\cdot\underbrace{p(\overline{\mathrm{A}})\cdot p(\overline{\mathrm{A}})\cdot\cdots\cdot p(\overline{\mathrm{A}})}_{(n-r) \text{ fracasos}}=p^r\cdot q^{n-r}$$

② Agora ben, hai que considerar tódalas maneiras posibles de obter n éxitos e $n-r$ fracasos, que será o número combinatorio $C_n^r = \binom{n}{r}$.

③ Se se representa por X a variable aleatoria binomial que representa o número de éxitos, tense:

$$p(\text{obter } r \text{ éxitos}) = p(X=r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$$

Dise que unha variable aleatoria X segue unha *distribución binomial* de parámetros n e p se a súa función de probabilidade é

$$\boxed{p(\text{obter } r \text{ éxitos}) = p(X=r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r} \equiv p_n(r) = C_n^r \cdot p^r \cdot q^{n-r}}$$

Abreviadamente indicarase:

$$X \to B(n,p)$$

A probabilidade de que o suceso ocorra:

— menos de k veces é: $p_n(0)+p_n(1)+\ldots+p_n(k-1)$.

— máis de k veces é: $p_n(k+1)+p_n(k+2)+\ldots+p_n(n)$.

— non menos de k veces é: $p_n(k)+p_n(k+1)+\ldots+p_n(n)$.

— non máis de k veces: $p_n(0)+p_n(1)+\ldots+p_n(k)$.

A *función de distribución* dunha $B(n,p)$ é:

$$F(x) = p(X \le x) = \begin{cases} 0, \ x<0 \\ \sum_{i=1}^{x} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i}, \ 0 \le x \le n \\ 1, \ x \ge n \end{cases}$$

245. Nos seguintes exemplos indica se se trata dunha distribución binomial ou non, e en caso afirmativo indica os valores de n e p.

245.1. Lanzamos 10 moedas ao ar e nos preguntamos polo número de caras.
Supoñendo que as moedas son correctas, trátase dunha distribución binomial con $n=10$ e $p=0.5$: $B(10,0.5)$.

245.2. Lanzamos 6 dados correctos e preguntámonos polo número de "cincos".
É unha distribución binomial, na que $n=6$ e $p=\frac{1}{6}$: $B\left(6,\frac{1}{6}\right)$.

245.3. Sácanse cinco cartas dunha baralla e preguntámonos cantas serán figuras.
Non é unha distribución binomial, dado que cada vez que se extrae unha carta modifícase a composición do mazo e, polo tanto, modifícase a probabilidade de figura na seguinte extracción. É dicir, as cinco probas sucesivas ***non son idénticas***.

245.4. Sácase unha carta dunha baralla española, obsérvase se é figura ou non e devólvese ao mazo. Barállase e vólvese a extraer unha carta. Repítese 5 veces este experimento. É dicir, sácanse cinco cartas con reemprazamento.
É unha distribución binomial, dado que a probabilidade de sacar figura en cada caso é a mesma debido ao remprazamento. $n=5$ e $p=\frac{12}{40}=0.3$: $B(5,0.3)$.

245.5. Preguntámonos cantos partidos gañará o Deportivo nos seus próximos 10 partidos de liga.
Non é unha distribución binomial, posto que a probabilidade de gañar nun partido é moi distinta da de gañar noutro. Os 10 experimentos ***non son idénticos***.

245.6. Unha máquina produce parafusos e, por termo medio, un 2% son defectuosos. Empaquétanse en caixas de 100. Preguntámonos cantos parafusos defectuosos haberá en cada caixa.
É unha distribución binomial, con $n=100$ e $p=\frac{2}{100}=0.02$: $B(100,0.02)$.

3.4.4. Media, desviación típica e varianza da distribución binomial

Para dunha distribución binomial con n probas de Bernoulli repetidas só hai que multiplicar por n os valores da distribución de Bernoulli [90], obténdose:

- Media: $\mu = n \cdot p$.
- Varianza: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$.
- Desviación típica: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$.

246. Un estudio sociolóxico determinou que o 35% dos residentes na comarca de Betanzos fan deporte. Escóllese ao chou unha mostra formada por 10 persoas. Comproba se a variable que expresa o número de deportistas dentro da mostra segue unha distribución binomial. En caso afirmativo, sinala os parámetros da distribución.

Solución:

246.1. Miremos se cumpre as características dunha distribución binomial.

① En cada caso só son posibles dous resultados: $\mathrm{A} =$ «deportista» e $\bar{\mathrm{A}} =$ «non deportista» .

② O resultado obtido da pregunta «practica deporte» ou «non practica deporte» en cada individuo da mostra é independente dos outros.

③ A probabilidade do suceso A , $p = p(\mathrm{A}) = 0.35$ é constante.

246.2. A variable que representa o número de individuos deportistas na mostra é unha variable aleatoria que pode tomar os valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 10.

Polo tanto, os valores $n = 10$ e $p = 0.35$ son os parámetros da distribución que representaremos por $B(10, 0.35)$.

Cando se desexa expresar a función de probabilidade da distribución binomial $B(n, p)$ en forma de táboa, normalmente, ponse da seguinte maneira:

r	0	1	2	…	n
p	$\binom{n}{0} \cdot q^n$	$\binom{n}{1} \cdot p \cdot q^{n-1}$	$\binom{n}{2} \cdot p^2 \cdot q^{n-2}$	…	$\binom{n}{n} \cdot p^n$

Obtendo correspondentes valores de p , $\binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$.

3.4.5. Propiedade reprodutiva

Esta propiedade refírese a que cando se suman varias variables aleatorias independentes coa mesma distribución a variable aleatoria suma ten a mesma distribución, aínda que con distintos parámetros.

Se X_1 e X_2 son dúas variables aleatorias independentes distribuídas segundo unhas distribucións binomiais $B(n_1, p)$ e $B(n_2, p)$, respectivamente, entón a variable aleatoria

$$X = X_1 + X_2$$

distribúese segundo unha $B(n_1 + n_2, p)$. É dicir:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \to B(n_1, p) \\ X_2 \to B(n_2, p) \end{array}\right\} \to X = X_1 + X_2 \to B(n_1 + n_2, p)$$

247. Un dispositivo está composto por tres elementos que traballan independentemente. A probabilidade de fallo de cada elemento nunha proba é igual a 0.1. Forma a lei de distribución do número de elementos que fallan nunha proba.

Solución:

A magnitude aleatoria discreta X : «número de elementos que fallan nun experimento» ten os seguintes valores posibles:

$x_1 = 0$: ningún dos elementos do dispositivo fallou.

$x_2 = 1$: fallou un só elemento do dispositivo.

$x_3 = 2$: fallaron dous elementos do dispositivo.

$x_4 = 3$: fallaron os tres elementos do dispositivo.

Posto que os fallos dos elementos son independentes entre si, as probabilidades de fallo de cada elemento son iguais entre si, é aplicable a fórmula de Bernoulli. Tendo en conta que polos datos $n=3$, $p=0.1$ (e polo tanto $q=1-0.1=0.9$), tense:

$$p_3(0)=p(X=0)=C_3^0 p^0 q^3=q^3=0.9^3=0.729;$$

$$p_3(1)=p(X=1)=C_3^1\cdot p^1\cdot q^2=C_3^1\cdot 0.1^1\cdot 0.9^2=0.243;$$

$$p_3(2)=p(X=2)=C_3^2\cdot p^2\cdot q^1=C_3^2\cdot 0.1^2\cdot 0.9^1=0.027;$$

$$p_3(3)=p(X=3)=C_3^3\cdot p^3\cdot q^0=C_3^3\cdot 0.1^3\cdot 0.9^0=0.001.$$

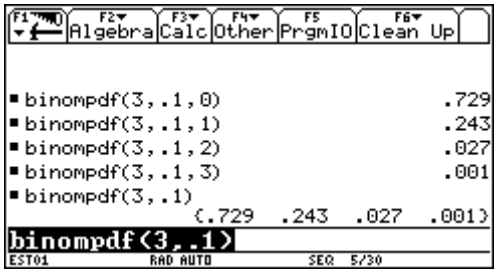
Verificación:

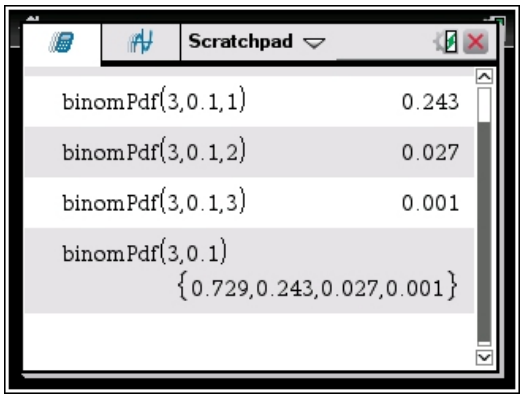
$$0.429+0.243+0.027+0.001=1$$

Polo tanto, pode escribirse a lei de distribución binomial buscada de X é:

x_i	0	1	2	3
p_i	0.729	0.243	0.027	0.001

Evidentemente, coas calculadoras que usamos podemos facer estes cálculos empregando a función $\text{binomPdf}(n, p, XVal)$.





A función $\text{binomPdf}(n, p, XVal)$ calcula a probabilidade para a distribución binomial discreta para un número de probas n e probabilidade de éxito p en cada proba e o valor $XVal$.

248. Calcula a probabilidade de que ocorra o suceso A ao menos tres veces en catro probas independentes, se a probabilidade de que ocorra o suceso A nunha proba é igual a 0.4.

Solución:

Dado que son probas independentes, e $p(\text{A})=0.4$ se mantén constante, é aplicable a fórmula de Bernoulli. Dado que $q=1-p=1-0.4=0.6$, a probabilidade pedida é:

$$p_4(3)+p_4(4)=C_4^3\cdot 0.4^3\cdot 0.6^1+C_4^4\cdot 0.4^4\cdot 0.6^0=4\cdot 0.4^3\cdot 0.6^1+1\cdot 0.4^4\cdot 0.6^0=0.1792.$$

249. Lánzase unha moeda corrente 6 veces, ou o seu equivalente, 6 moedas correntes unha vez. Sexa $A=$ «cara». Calcula:

249.1. A probabilidade de obter exactamente dúas "caras".

249.2. A probabilidade de obter, polo menos, catro "caras".

249.3. A probabilidade de non obter ningunha "cara".

249.4. A probabilidade de obter unha "cara", polo menos.

Solución:

Temos $n=6$ e $p=\frac{1}{2}$, $q=1-p=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

249.1. A probabilidade de obter exactamente dúas caras $(r=2)$ é:

$$p_6(2)=\binom{6}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{15}{64}=0.234375.$$

249.2. A probabilidade de conseguir polo menos 4 caras $(r=4, r=5, r=6)$ é:

$$p_6(4)+p_6(5)+p_6(6)=\binom{6}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\binom{6}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+\binom{6}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{15}{64}+\frac{6}{64}+\frac{1}{64}=\frac{22}{64}=\frac{11}{32}=0.34375.$$

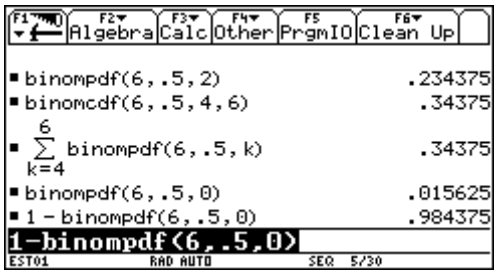
249.3. A probabilidade de 0 caras (todos fracasos) é:

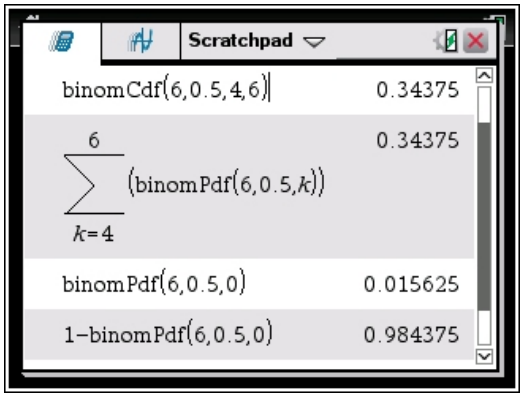
$$p_6(0)=\binom{6}{0}\cdot p^0\cdot q^6 \equiv q^6=\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}=0.015625.$$

249.4. A probabilidade dunha cara polo menos (complementaria de todo fracaso) é:

$$1-q^6=1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}.$$

Todos os cálculos deste exemplo feitos coas calculadoras habituais. É conveniente fixarse na función $\text{binomCdf}(n,p,ExtrInf,ExtrSup)$.





A función $\text{binomCdf}(n,p,ExtrInf,ExtrSup)$ calcula a probabilidade acumulada para a distribución binomial discreta para un número de probas n e probabilidade de éxito p en cada proba entre os extremos $ExtrInf$ e $ExtrSup$:

$$\text{binomCdf}(n,p,ExtrInf,ExtrSup)\equiv\sum_{k=ExtrInf}^{ExtrSup}\text{binomCdf}(n,p,k).$$

250. O examinador da ao estudante preguntas suplementarias. A probabilidade de que o estudante responda calquera pregunta dada é igual a 0.9. O profesor interrompe o exame apenas o estudante manifesta o descoñecemento da pregunta feita. Pídese:

250.1. Formar a distribución de probabilidade da magnitude aleatoria X: «número de preguntas suplementarias que da o profesor ao estudante».

250.2. Calcular o número máis probable k_0 de preguntas suplementarias feitas ao estudante.

Solución:

A magnitude aleatoria X: «número de preguntas suplementarias que da o profesor ao estudante» pode tomar os seguintes valores: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, …, $x_k=k$, … Calcúlase agora a probabilidade destes valores posibles.

A magnitude X toma o valor posible $x_1=1$ (o examinador da só unha pregunta) se o estudante non responde á primeira pregunta. A probabilidade deste valor posible é $1-0.9=0.1$. Polo tanto, $p(x_1)=p(X=1)=0.1$.

A magnitude X toma o valor posible $x_2=2$ (o examinador da só 2 preguntas) se o estudante responde á primeira pregunta (a probabilidade deste suceso é 0.9) e non contesta á segunda (a probabilidade deste suceso é 0.1). Polo tanto, $p(x_2)=p(X=2)=0.9\cdot 0.1=0.09$.

Analogamente se obteñen:

$$p(x_3)=p(X=3)=0.9\cdot 0.9\cdot 0.1=0.9^2\cdot 0.1=0.081.$$

$$p(x_4)=p(X=4)=0.9\cdot 0.9\cdot 0.9\cdot 0.1=0.9^3\cdot 0.1=0.0729.$$

E, en xeral, $p(x_k)=p(X=k)=0.9^{k-1}\cdot 0.1$

250.1. A distribución de probabilidade buscada é:

x_i	1	2	3	4	…	k	…
p_i	0.1	0.09	0.081	0.0729	…	$0.9^{k-1}\cdot 0.1$	…

250.2. O número máis probable k_0 de preguntas dadas (o valor máis probable de X), é dicir, o número de preguntas dadas polo profesor que ten máis probabilidade, como se aprecia na táboa do punto anterior 250.1. é a unidade: $x_1=1$.

251. Dous xadrecistas de igual mestría xogan ao xadrez. Sen ter en conta o feito de quedar en táboas, que é máis probable gañar: dúas de catro partidas ou tres de seis partidas?

Solución:

Posto que xogan xadrecistas de igual capacidade, a probabilidade de gañar é $p = 1/2$ e, polo tanto, a probabilidade de perder tamén é igual: $q = 1/2$. Dado que en todas as partidas a probabilidade de gañar é constante e non ten importancia en que sucesión serán gañadas as partidas, pode aplicarse a fórmula de Bernoulli.

A probabilidade de gañar tres de seis partidas é:

$$p_6(3) = C_6^3 \cdot p^3 \cdot q^3 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}.$$

A probabilidade de que dúas de catro partidas sexan gañadas:

$$p_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^2 = \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} = \frac{6}{16}.$$

Así tense que $p_4(2) = \frac{6}{16} > p_6(3) = \frac{5}{16}$, polo que é máis probable gañar dúas de catro partidas que tres de seis partidas.

252. En la partida de pezas, o 10% non son estándar. Escóllense ao chou 4 pezas. Escribe a lei de distribución binomial da magnitude aleatoria discreta X, ou sexa, o número de pezas non estándar entre as catro escollidas.

Solución:

A magnitude aleatoria discreta X: «número de pezas non estándar» ten os seguintes valores posibles:

$x_1 = 0$: ningunha das pezas é non estándar, $x_2 = 1$: unha das pezas é non estándar, $x_3 = 2$: dúas pezas son non estándar, $x_4 = 3$: tres pezas son non estándar e x_4: as catro pezas son non estándar.

Posto que o feito de coller pezas non estándar en cada elección son independentes entre si, as probabilidades de elección de pezas non estándar son iguais entre si, é aplicable a fórmula de Bernoulli. Tendo en conta que polos datos $n = 4$, $p = 0.1$ (e polo tanto $q = 1 - 0.1 = 0.9$), tense:

$p_4(0) = p(X=0) = C_4^0 \cdot p^0 \cdot q^4 = C_4^0 \cdot 0.1^0 \cdot 0.9^4 = 0.6561$, $p_4(1) = p(X=1) = C_4^1 \cdot p^1 \cdot q^3 = C_4^1 \cdot 0.1^1 \cdot 0.9^3 = 0.2916$,

$p_4(2) = p(X=2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^2 = C_4^2 \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^2 = 0.0486$, $p_4(3) = p(X=3) = C_4^3 \cdot p^3 \cdot q^1 = C_4^3 \cdot 0.1^3 \cdot 0.9^1 = 0.0036$,

$p_4(4) = p(X=4) = C_4^4 \cdot p^4 \cdot q^0 = C_4^4 \cdot 0.1^4 \cdot 0.9^0 = 0.0001$.

Comprobación: $0.6561 + 0.2916 + 0.0486 + 0.0036 + 0.0001 = 1$.

A función de distribución binomial buscada de X é:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0.6561	0.2916	0.0486	0.0036	0.0001

253. Nunha partida de 10 pezas hai 8 que son estándar. Cóllense ao azar 2 pezas. Constrúe a distribución de probabilidade do número de pezas estándar entre as escollidas.

Solución:

Sexa a magnitude aleatoria X: «número de pezas estándar entre as dúas escollidas». A función X pode tomar os valores $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. As probabilidades dos valores x_i son:

$$p(x_1) = p(X=0) = \frac{C_8^0 \cdot C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{\frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}} = \frac{1}{45},\quad p(x_2) = p(X=1) = \frac{C_8^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{8\cdot 2}{\frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}} = \frac{16}{45},$$

$$p(x_3) = p(X=2) = \frac{C_8^2 \cdot C_2^0}{C_{10}^2} = \frac{\frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}}{\frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}} = \frac{28}{45}.$$

Comprobación:

$$\frac{1}{45} + \frac{16}{45} + \frac{28}{45} = \frac{45}{45} = 1.$$

A lei de distribución buscada de X é:

x_i	0	1	2
p_i	$1/45$	$16/45$	$28/45$

254. Dous xogadores igualmente hábiles xogan ao xadrez. Sen ter en conta o feito de quedar en táboas, que é máis probable gañar:

254.1. Unha de dúas partidas ou dúas de catro?

254.2. Non menos de dúas de catro partidas ou non menos de tres de cinco partidas?

Solución:

Posto que xogan xadrecistas de igual capacidade, a probabilidade de gañar é $p=\frac{1}{2}$ e, polo tanto, a probabilidade de perder tamén é $q=\frac{1}{2}$. Dado que en todas as partidas a probabilidade de gañar é constante e non ten importancia en que sucesión serán gañadas as partidas, pode aplicarse a fórmula de Bernoulli:

$$p_n(r)=C_n^r\cdot p^r\cdot q^{n-r} \equiv p_n(r)=\binom{n}{r}\cdot p^r\cdot q^{n-r} \equiv p_n(r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}\cdot p^r\cdot q^{n-r}$$

254.1. $p_2(1)=C_2^1\cdot p^1\cdot q^1=\frac{2}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$.

$p_4(2)=C_4^2\cdot p^2\cdot q^2=\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$.

$p_2(1)=\frac{1}{2}=\frac{4}{8}>\frac{3}{8}=p_4(2)$.

Polo tanto, é máis probable gañar unha de dúas partidas que dúas de catro.

254.2. A probabilidade de gañar non menos de dúas de catro partidas é:

$$p_4(2)+p_4(3)+p_4(4)=1-\left[p_4(0)+p_4(1)\right]=1-\left[C_4^0\cdot p^0\cdot q^4+C_4^1\cdot p^1\cdot q^3\right]=1-\left[1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]=$$

$$=1-\left[\frac{1}{16}+4\cdot\frac{1}{16}\right]=1-\frac{5}{16}=\frac{11}{16}=0.6875.$$

A probabilidade de gañar non menos de tres de cinco partidas é:

$$p_5(3)+p_5(4)+p_5(5)=C_5^3\cdot p^3\cdot q^2+C_5^4\cdot p^4\cdot q^1+C_5^5\cdot p^5\cdot q^0=$$

$$=\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1+1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{16}{32}=\frac{8}{16}.$$

Polo tanto, é máis probable gañar dúas de catro partidas que tres de cinco.

255. Unha moeda lánzase 5 veces. Calcula a probabilidade de que saia cruz:

255.1. Menos de dúas veces.

255.2. Non menos de dúas veces.

Solución:

A probabilidade de gañar (que saia cruz) é $p=1/2$ e, polo tanto, a probabilidade de perder (que saia cara) é $q=1/2$. Dado que en cada lanzamento a probabilidade de gañar é constante, pode utilizarse a fórmula de Bernoulli.

255.1. A probabilidade de sacar cruz menos de dúas veces no lanzamento de 5 moedas é:

$$p_5(0)+p_5(1)=\binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5+\binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{16}.$$

255.2. A probabilidade de sacar non menos de dúas cruces no lanzamento de 5 moedas é:

$$p_5(2)+p_5(3)+p_5(4)+p_5(5)=1-\left[p_5(0)+p_5(1)\right]=1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}.$$

256. O suceso B ocorrerá se o suceso A se produce ao menos catro veces. Calcula a probabilidade de que o suceso B ocorra se se realizan 5 probas independentes, en cada un das cales a probabilidade de que apareza o suceso A é igual a 0.8.

Solución:

A repetición do suceso A de maneira independente e o feito de que a probabilidade en cada caso sexa constante e igual a 0.8 fai que se poda aplicar a fórmula de Bernoulli.

Como $q=1-0.8=0.2$, a probabilidade pedida é:

$$p(B)=p_5(4)+p_5(5)=\binom{5}{4}\cdot 0.8^4\cdot 0.2^1+\binom{5}{5}\cdot 0.8^5\cdot .2^0=0.73728.$$

257. Mirando os datos dos nacementos ocorridos en Ribadeo durante o ano 2006, vese que a probabilidade de que naceran varóns foi do 0.51. Collidas cinco fichas de inscrición no padrón municipal dos nacidos no ano 2006 en Ribadeo, calcula a probabilidade de que as referencias desas fichas:

257.1. Dúas sexan de varóns.

257.2. Non máis de dúas sexan de varóns.

257.3. Máis de dous sexan de varóns.

257.4. Non menos de dúas nin máis de tres sexan de varóns.

Solución:

Está claro que son sucesos independentes, e a probabilidade é constante, polo que pode aplicarse a fórmula de Bernoulli.

Dado que $p = 0.51 \rightarrow q = 1 - 0.51 = 0.49$.

257.1. $p_5(2) = C_5^2 \cdot p^2 \cdot q^3 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot 0.51^2 \cdot 0.49^3 = 0.306005 \approx 0.31$.

257.2. $p_5(0) + p_5(1) + p_5(2) = \binom{5}{0} \cdot 0.51^0 \cdot 0.49^5 + \binom{5}{1} \cdot 0.51^1 \cdot 0.49^4 + \binom{5}{2} \cdot 0.51^2 \cdot 0.49^3 \approx 0.48$.

257.3. $p_5(3) + p_5(4) + p_5(5) = 1 - \left[p_5(0) + p_5(1) + p_5(2) \right] \approx 0.52$.

257.4. $p_5(2) + p_5(3) = \binom{5}{2} \cdot 0.51^2 \cdot 0.49^3 + \binom{5}{3} \cdot 0.51^3 \cdot 0.49^2 \approx 0.62$.

258. Un segmento AB de 15 cm de lonxitude está dividido por o punto C nunha relación $2:1$. Sobre este segmento márcanse ao chou 4 puntos. Calcula a probabilidade de que dous deles resulten á esquerda de C e dous á dereita. Suponse que a probabilidade de que un punto caia no segmento é proporcional á lonxitude do segmento e non depende da súa posición.

Solución:

Sexa A o suceso que ocorre cando un punto cae na parte grande da relación $2:1$ na que o punto C divide ao segmento AB.

A súa probabilidade é $p(A) = \frac{2}{3}$, e é constante, e a repetición do experimento faise en condicións de independencia, polo que é aplicable a fórmula de Bernoulli. O éxito do experimento é que dous puntos caian na parte grande.

Dado que $p = \frac{2}{3} \rightarrow q = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

$$p_4(2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27} \approx 0.296.$$

259. Sobre un segmento AB de lonxitude a márcanse ao azar 5 puntos. Calcula a probabilidade de que dous puntos se encontren a unha distancia menor que x do punto A, e tres a unha distancia maior que x. Suponse que a probabilidade de que un punto caia no segmento é proporcional á lonxitude do mesmo e non depende da súa posición.

Solución:

A probabilidade de que un punto caia a unha distancia menor que x de A é $\frac{x}{a}$, e é constante. A repetición do experimento faise en condicións de independencia, polo que é aplicable a fórmula de Bernoulli.

Dado que $p = \frac{x}{a} \rightarrow q = 1 - \frac{x}{a} = \frac{a - x}{a}$. Polo tanto, a probabilidade pedida é:

$$p_5(2) = C_5^2 \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{a-x}{a}\right)^3 = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{a-x}{a}\right)^3.$$

260. Un representante de comercio fai cinco visitas diarias a comercios do seu ramo, e pola experiencia de anos anteriores sabe que a probabilidade de que lle fagan un pedido en cada visita é do 40%. Obtén:

260.1. A distribución do número de pedidos diarios.

260.2. As probabilidades para os diferentes números de pedidos.

260.3. O número medio de pedidos diarios.

260.4. A varianza.

260.5. A probabilidade de que o número de pedidos que obtén durante un día se atope comprendido entre 1 e 3.

260.6. A probabilidade de que, polo menos, realice dous pedidos.

260.7. A representación gráfica da función de probabilidade.

Solución:

260.1. Sexa X a variable aleatoria que indica o número de pedidos por día; X distribúese segundo unha binomial de parámetros $n=5$, $p=0.4$

$$X \to B(5,0.4)$$

A distribución ou función de probabilidade será:

$$p(X=x)=\binom{5}{x}\cdot(0.4)^x\cdot(0.6)^{5-x},\ x=0,1,2,3,4,5$$

260.2. Tense: $p_5(0)=p(X=0)=\binom{5}{0}\cdot(0.4)^0\cdot(0.6)^5=0.07776$.

$p_5(1)=p(X=1)=\binom{5}{1}\cdot(0.4)^1\cdot(0.6)^4=0.2592$.

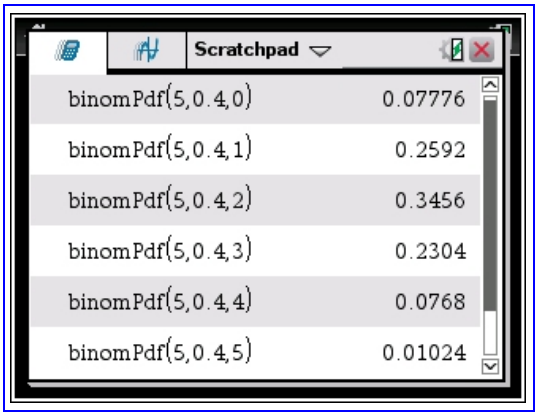
$p_5(2)=p(X=2)=\binom{5}{2}\cdot(0.4)^2\cdot(0.6)^3=0.3456$.

$p_5(3)=p(X=3)=\binom{5}{3}\cdot(0.4)^3\cdot(0.6)^2=0.2304$.

$p_5(4)=p(X=4)=\binom{5}{4}\cdot(0.4)^4\cdot(0.6)^1=0.0768$.

$p_5(5)=p(X=5)=\binom{5}{5}\cdot(0.4)^5\cdot(0.6)^0=0.01024$.

Os cálculos poden facerse usando a función $\text{binomPdf}(n,p,XVal)$, como se ve na copia de pantalla adxunta.



260.3. O número medio de pedidos diarios é:

$\mu=n\cdot p=5\cdot 0.4=2$.

260.4. A varianza:

$\sigma^2=n\cdot p\cdot q=5\cdot 0.4\cdot 0.6=1.2$.

260.5. A probabilidade de que o número de pedidos que obtén durante un día se atope comprendido entre 1 e 3.

$p(1\le X\le 3)=p(X=1)+p(X=2)+p(X=3)=$

$=0.2592+0.3456+0.2304=0.8352$.

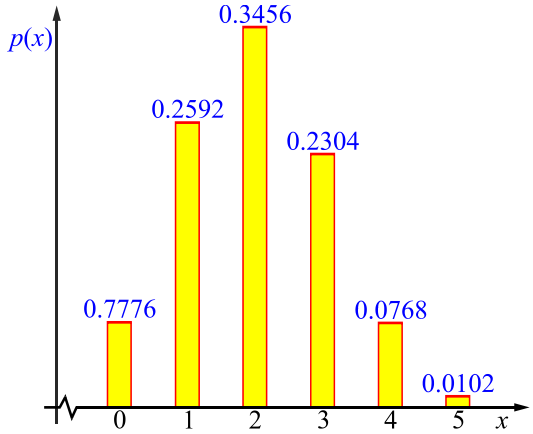
260.6. A probabilidade de que, polo menos, realice dous pedidos.

$p(X\ge 2)=p(X=2)+p(X=3)+p(X=4)+p(X=5)=$

$=1-P(X<2)=1-p(X=0)-p(X=1)=1-F(1)=$

$=1-0.33696=0.66304$.

260.7. A representación gráfica da función de probabilidade $B(5,0.4)$ é a adxunta:



261. Unha empresa dispón de 10 furgonetas de reparto, e comprobouse que cada unha delas ten algunha avaría o 5% dos días. Calcula a probabilidade de que un día determinado:

261.1. Non haxa ningunha avaría.

261.2. Haxa máis de 5 furgonetas avariadas.

261.3. Se atopen todas avariadas.

Solución:

Sexa X a variable aleatoria discreta que expresa o número de furgonetas que están avariadas. X segue unha distribución binomial de parámetros $B(10,0.05)$.

261.1. $p_{10}(0)=p(X=0)=\binom{10}{0}\cdot 0.95^{10}=0.598737$.

261.2. $p(X>5)=p(X=6)+p(X=7)+p(X=8)+p(X=9)+p(X=10)=$

$$=\binom{10}{6}0.05^6\cdot 0.95^4+\binom{10}{7}0.05^7\cdot 0.95^3+\binom{10}{8}0.05^8\cdot 0.95^2+\binom{10}{9}0.05^9\cdot 0.95+\binom{10}{10}0.05^{10}=0.000002754583=$$

$$=2.754583\cdot 10^{-6}.$$

261.3. $p(X=10)=\binom{10}{10}\cdot 0.05^{10}=9.765625\cdot 10^{-14}$.

262. Tíranse n dados. Calcula a esperanza matemática da suma do número de puntos que caen en todas las caras.

Solución:

Sexa X : «suma do número de puntos que caen en todas as caras», X_i , $(i=1,2,\ldots,n)$: «número de puntos que cae na cara do i –ésimo dado». Entón é evidente que:

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n.$$

Polo tanto:

$$E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n).$$

É indubidable que todas as magnitudes X_i teñen igual distribución, e, polo tanto, idénticas características numéricas e, en particular, iguais esperanzas matemáticas. É dicir:

$$E(X_1)=E(X_2)=\ldots=E(X_n)$$

Polo tanto:

$$E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)=n\cdot E(X_1).$$

Deste xeito, é suficiente calcular a esperanza matemática da magnitude X_1, ou sexa, a esperanza matemática do número de puntos que poden aparecer no «primeiro» dado. Para iso escribimos a lei de distribución de X_1:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Calculamos $E(X_1)$:

$$E(X_1)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}.$$

Polo tanto:

$$E(X)=n\cdot E(X_1)=\frac{7}{2}\cdot n.$$

4. DISTRIBUCIÓNS CONTINUAS

Ata agora estudamos as distribucións de probabilidade para variables aleatorias de tipo discreto, que podían tomar un número finito ou infinito numerable de valores. En moitas aplicacións estatísticas a variable aleatoria pode tomar calquera valor sobre un intervalo da recta real, é dicir, un número infinito de valores, sendo a variable aleatoria correspondente de tipo continuo.

As variables aleatorias de tipo continuo teñen que tratarse de maneira distinta a como se fixo coas variables aleatorias discretas, pois no caso discreto asignábanse probabilidades positivas a tódolos valores puntuais da variable, e a suma de todas elas era a unidade. *No caso continuo non é posible asignar unha probabilidade a cada un dos infinitos posibles valores da variable aleatoria* e que estas probabilidades sumen a unidade como no caso discreto, sendo necesario utilizar unha aproximación diferente para chegar a obter unha distribución de probabilidade dunha variable aleatoria continua. A aproximación que adoptaremos utiliza o histograma de frecuencia relativa, como se ve con máis detalle no que segue.

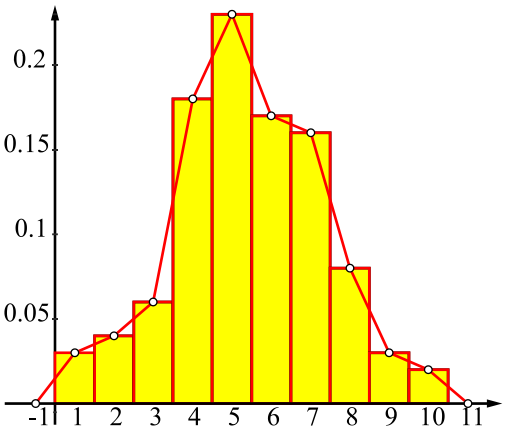
4.1. Aproximación intuitiva ao concepto de función de densidade

263. Supoñamos unha variable aleatoria X que mide os tempos que transcorren entre dúas chegadas consecutivas de 100 vehículos a unha gasolineira. Os tempos entre dúas chegadas consecutivas son medidos cun cronómetro de alta precisión que é capaz de medir o tempo ata unha milésima de segundo, de tal xeito que se un vehículo chega no instante 54.325 segundos e o próximo no instante 54.335 segundos o punto medio do intervalo sería de 54.330 segundos, pero a probabilidade correspondente asígnaselle ao intervalo e non ao valor medio 54.330, pois no caso continuo a probabilidade de que unha variable aleatoria tome un valor concreto é cero.

Supoñamos que a distribución de frecuencias relativas dos tempos entre dúas chegadas consecutivas de 100 vehículos a unha gasolineira é a dada pola táboa adxunta, onde se consideran 10 intervalos de lonxitude 1 minuto.

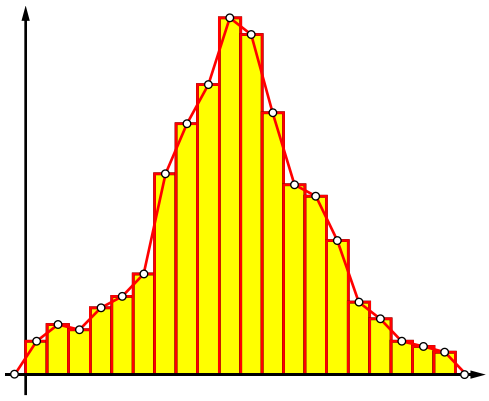
Facemos tamén a representación gráfica correspondente aos tempos de chegadas consecutivas co histograma de frecuencias relativas.

Tempo	Nº	h_i
$0 < x \le 1$	3	0.03
$1 < x \le 2$	4	0.04
$2 < x \le 3$	6	0.06
$3 < x \le 4$	18	0.18
$4 < x \le 5$	23	0.23
$5 < x \le 6$	17	0.17
$6 < x \le 7$	16	0.16
$7 < x \le 8$	8	0.08
$8 < x \le 9$	3	0.03
$9 < x \le 10$	2	0.02



Temos que ter en conta que a frecuencia se refire a cada intervalo e non ao punto medio, que todos os intervalos teñen a mesma lonxitude, 1, e a área do rectángulo construído sobre cada intervalo é igual á frecuencia relativa do correspondente intervalo e, consecuentemente, a suma de tódalas áreas é igual á unidade.

Supoñamos que en lugar de observar os tempos entre dúas chegadas consecutivas para 100 vehículos o facemos para 500 e consideramos 20 intervalos de *medio minuto* cada un. Entón teríamos un gráfico parecido ao anterior, pero con 20 intervalos, e consecuentemente, 20 rectángulos de base (ou amplitude) a metade cos anteriores.

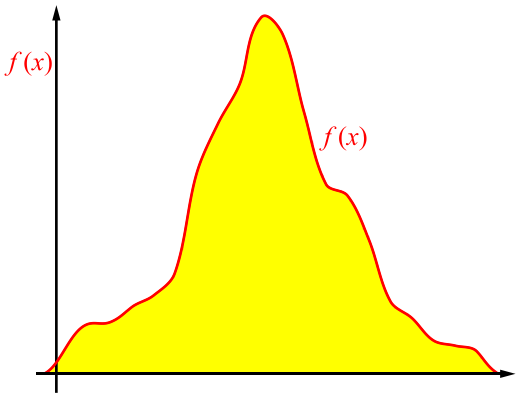


Seguindo con este proceso de aumentar o número de observacións e o número de intervalos aínda que de menos lonxitude, chegarase a obter un histograma de frecuencias relativas con moitos intervalos de lonxitude moi pequena, que no límite dará lugar a unha representación como a adxunta.

A curva límite $f(x)$ do histograma de frecuencias relativas obtense para un número grande de observacións, que neste exemplo, son vehículos que chegan á gasolineira, e para unhas amplitudes de intervalo moi pequenas.

A área encerrada por $f(x)$ *é igual á unidade*, do mesmo xeito que a área correspondente ao histograma de frecuencias era igual á unidade.

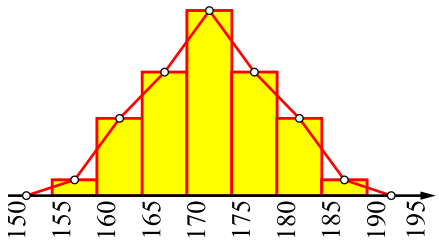
Vexamos outro exemplo.



264. Medíronse as tallas de 40 varóns e obtivéronse os resultados da táboa seguinte.

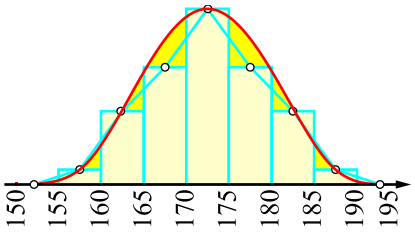
Talla	Nº
(150,155]	0
(155,160]	1
(160,165]	5
(165,170]	8
(170,175]	12
(175,180]	8
(180,185]	5
(185,190]	1
(190,195]	0

Facemos o polígono de frecuencias relativas e obtemos a figura da esquerda.



O diagrama da dereita proporciona unha idea intuitiva da *distribución de probabilidade continua*. Unha distribución de probabilidade é unha *idealización* dunha distribución de frecuencias relativas.

Podemos supoñer agora a distribución de tódolos varóns de Galicia, de España, … e a medida que os intervalos de clase se van facendo máis pequenos *tenden* ao diagrama representado debaixo.



Do mesmo xeito que a suma de tódalas frecuencias relativas nunha distribución de frecuencias é igual á unidade, tamén se verifica que a suma de tódalas probabilidades dunha distribución de probabilidades é igual á unidade.

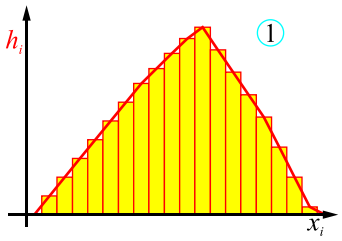
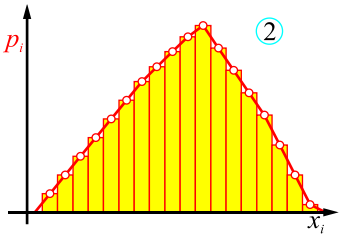
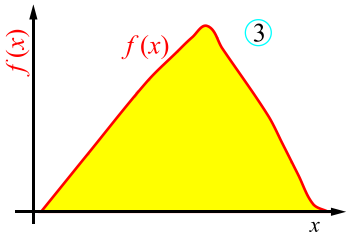
4.1.1. Concepto xeométrico/intuitivo de función de densidade

A función $f(x)$, cuxa representación gráfica é a *curva límite* correspondente ao histograma de frecuencias relativas é o que se chama *función de densidade de probabilidade*, ou simplemente a *función de densidade* da variable aleatoria continua X.

- A área baixo a función $f(x)$ é igual á unidade, do mesmo xeito que a área no correspondente histograma de frecuencias relativas era igual á unidade.

No caso da variables aleatorias continuas non ten sentido falar da probabilidade nun punto, porque sempre é cero; en cambio, ten interese coñecer a probabilidade correspondente a un intervalo.

5. Funcións de densidade ou función de probabilidade continua

Variable estatística →	Variable aleatoria discreta →	Variable aleatoria continua
 *Distribución de frecuencias relativas dunha variable estatística* X: • Os intervalos de clase son as bases dos rectángulos. • As alturas dos rectángulos son as frecuencias relativas. • A área debaixo da poligonal é a unidade.	 *Función de probabilidade dunha variable aleatoria discreta* X: • Os intervalos de clase son as bases dos rectángulos. • As alturas dos rectángulos son as probabilidades. • A área debaixo da poligonal é a unidade.	 *Función de densidade dunha variable aleatoria continua* X. A medida que os intervalos de clase se fan máis pequenos, o polígono de probabilidades tende a unha curva continua. • A área do recinto debaixo da curva é a unidade. • A área baixo a curva entre os límites dun intervalo e a probabilidade de que a variable aleatoria caia dentro dese intervalo.

A función $f(x)$ asociada a unha variable aleatoria X chámase *función de densidade da variable aleatoria continua* X cando cumpre as seguintes condicións:

- $f(x) \geq 0$ en todo o dominio de definición.
- A área encerrada debaixo da curva de $f(x)$ é a unidade $\leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

  (x representa valores particulares da variable aleatoria X).

Hai que remarcar a *analoxía* entre as condicións que verificaba $P(x)$ para ser unha *función de probabilidade* —tamén chamada *distribución de probabilidade*— para unha variable aleatoria discreta e as condicións que verifica $f(x)$ para ser unha *función de densidade dunha variable continua*.

- No caso discreto, a probabilidade ou masa de probabilidade asignábase a cada valor da variable aleatoria, mentres que no caso continuo, a probabilidade e considerada como unha *densidade de probabilidade* sobre o rango de valores da variable aleatoria; é dicir, no caso discreto existen probabilidades puntuais, sen embargo, no caso continuo a $p(X=x_i)=0$, e a probabilidade non se asigna a un punto senón a un intervalo.
- No caso discreto a suma das *probabilidades* é igual á unidade, mentres que no caso continuo a sumas das *densidades de probabilidade* —ou área baixo a curva $f(x)$— debe ser igual á unidade, e consecuentemente, a probabilidade de que a variable aleatoria continua X tome valores non intervalo $[a,b]$ será igual á área baixo a curva $f(x)$ acotada entre a e b, é dicir:

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

- Se a variable aleatoria X é discreta, sabemos que existen as probabilidades puntuais $p(X=x_i)$, pero no caso continuo, se x_i é un punto interior ao intervalo de definición da variable aleatoria continua X, entón $p(X=x_i)=0$, en efecto:

$$p(X=x_i) = p(x_i \le X \le x_i) = \int_{x_i}^{x_i} f(x) = 0$$

265. Sexa unha variable aleatoria continua X cuxa función de densidade $f(x)$ é:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, 15 \le x \le 17 \\ 0, \text{ no resto} \end{cases}$$

265.1. Fai a representación gráfica da función de densidade.

265.2. Comproba que efectivamente $f(x)$ é unha función de densidade.

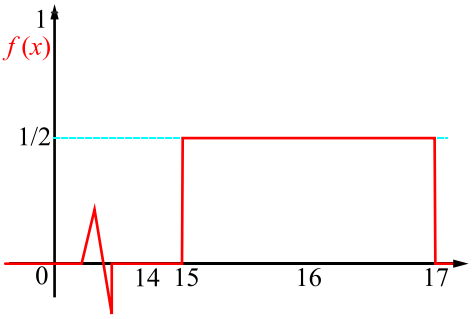
265.3. Obtén graficamente $P(15 \le X \le 16)$ e $P(16.25 \le X \le 16.75)$.

265.4. Obtén $P(X \le 16)$, $P(X \le 17)$ e a $P(X \le k)$ para $15 \le k \le 17$.

265.5. Obtén a función de distribución e o valor que toma no punto $x=16$.

Solución:

265.1. A representación gráfica da función de densidade é a que se ve na imaxe adxunta. Recortamos un espazo no eixo de abscisas co fin de facer máis ilustrativa a representación gráfica.



265.2. Para ver que é unha función de densidade téñense que verificar as dúas condición seguintes:

— $f(x) \ge 0, -\infty < x < +\infty$.

— A área encerrada pola curva e o eixe de abscisas é a unidade, ou o que é equivalente: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

É evidente que se verifica a primeira condición $f(x) \ge 0$, $-\infty < x < +\infty$.

Para averiguar se se verifica a segunda condición facémolo de dúas maneiras: buscando xeometricamente a área encerrada e calculando a integral:

I. A área é a dun rectángulo de base 2 unidades e altura $\frac{1}{2}$ unidades, polo que a súa área é: $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ unidades.

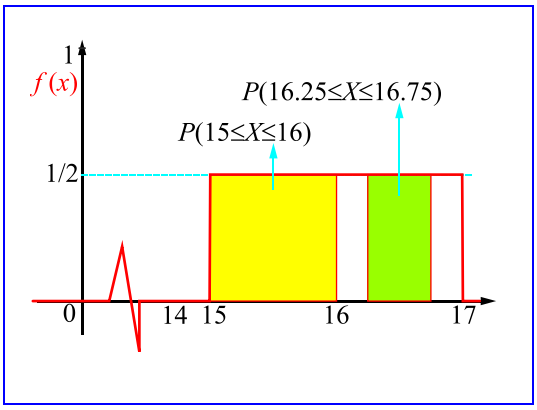
II. Comprobando que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \leftrightarrow \int_{15}^{17} \frac{1}{2}dx = 1$; en efecto: $\int_{15}^{17} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}[x]_{15}^{17} = \frac{1}{2}(17-15) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

Polo tanto, $f(x)$ é unha función de densidade.

265.3. Para obter as probabilidades pedidas $P(15 \le X \le 16)$ e $P(16.25 \le X \le 16.75)$, representámolas graficamente, e temos:

$P(15 \le X \le 16) = área = base \times altura = 1 \cdot 0.5 = 0.5$.

$P(16.25 \le X \le 16.75) = área = base \times altura = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$.



265.4. $P(X \le 16) = P(-\infty < X \le 16) = P(15 \le X \le 16) = \int_{15}^{16} \frac{1}{2} dx =$

$= \frac{1}{2}[x]_{15}^{16} = \frac{1}{2}(16-15) = 0.5$, como se ve na figura.

$P(X \le 17) = P(-\infty < X \le 17) = P(15 \le X \le 17) = \int_{15}^{17} \frac{1}{2} dx =$

$= \frac{1}{2}[x]_{15}^{17} = \frac{1}{2}(17-15) = 1$, resultado tamén intuído da representación gráfica.

$P(X \le k)$ para $15 \le k \le 17 \rightarrow P(X \le k) = P(-\infty < X \le k) = P(15 < X \le k) = \int_{15}^{k} \frac{1}{2} dx = = \frac{1}{2}[x]_{15}^{k} = \frac{1}{2}(k-15)$, con $15 \le k \le 17$.

265.5. A función de distribución $F(x)$ é:

$$\boxed{F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < 15 \\ \frac{x-15}{2}, & 15 \le x \le 17 \\ 1, & x > 17 \end{cases}} \rightarrow F(16) = P(X \le 16) = \frac{16-15}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

266. Sexa a función adxunta.

$$f(x) = \begin{cases} k & x \in [1,5] \\ 0 & x \notin [1,5] \end{cases}$$

266.1. Calcula o valor de k para que a función adxunta sexa unha función de densidade.

266.2. Calcula $p(2 \le x < 3)$.

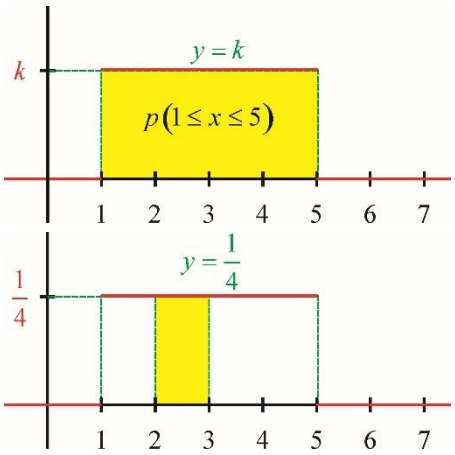
266.3. Calcula $p(2 \le x < 5)$.

266.4. Calcula $p(2 \le x < 7)$.

Solución:

266.1. Hai que lembrar que a área total debaixo da curva é 1. Neste caso:

$$p(-\infty < x < +\infty) = p(1 \le x \le 5) = 4 \cdot k = 1 \rightarrow \boxed{k = \frac{1}{4}}.$$



266.2. $p(2 \le x < 3) \overset{*}{=} p(2 \le x \le 3) = (3-2) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

266.3. $p(2 \le x < 5) \overset{*}{=} p(2 \le x \le 5) = (5-2) \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

266.4. $p(2 \le x < 7) = p(2 \le x \le 5) = (5-2) \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, dado que no tramo $[5,7]$ a probabilidade é 0.

* Hai que lembrar que a probabilidade de sucesos puntuais é cero.

267. Sexa a función adxunta.

$$f(x) = \begin{cases} mx & x \in [0,4] \\ 0 & x \notin [0,4] \end{cases}$$

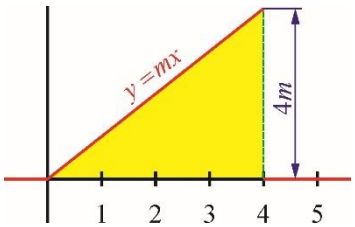
267.1. Calcula m para que sexa unha función de densidade.

267.2. Calcula $p(2 < x < 3)$ e $p(0 < x < 3)$.

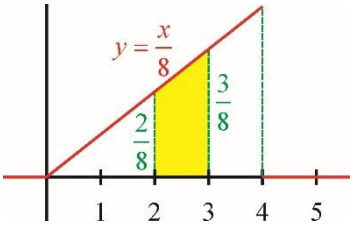
Solución:

267.1. Hai que lembrar que a área total debaixo da curva é 1. Neste caso:

$$p(-\infty < x < +\infty) = p(0 \le x \le 4) = \frac{4 \cdot 4m}{2} = 8m = 1 \rightarrow \boxed{m = \frac{1}{8}}$$

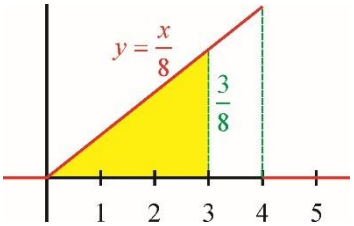


267.2. $p(2<x<3)\overset{*}{=}p(2\le x\le 3)$ é a área do trapecio remarcado da figura adxunta.



$$p(2<x<3)\overset{*}{=}p(2\le x\le 3)=\frac{\frac{2}{8}+\frac{3}{8}}{2}\cdot 1=\frac{5}{16}.$$

$p(0<x<3)\overset{*}{=}p(0\le x\le 3)$ é a área do triángulo remarcado da figura adxunta.



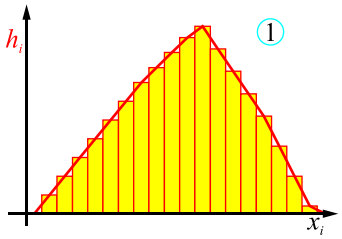
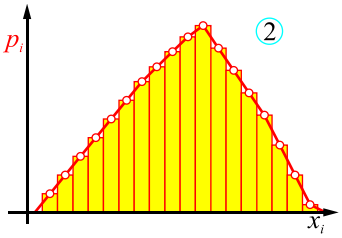
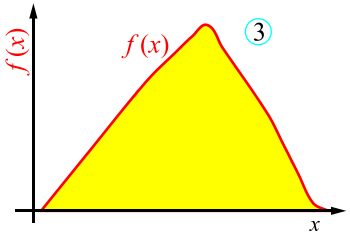
$$p(0<x<3)\overset{*}{=}p(0\le x\le 3)=\frac{3\cdot\frac{3}{8}}{2}=\frac{9}{16}.$$

* Hai que lembrar que a probabilidade de sucesos puntuais é cero.

5.1. Media (esperanza matemática), varianza e desviación típica dunha variable aleatoria continua

De maneira similar a como definíamos a media, a varianza e a desviación típica dunha variable aleatoria discreta, defínense a media, varianza e desviación típica dunha variable aleatoria continua.

Unicamente teremos en conta que no caso discreto tratábase de sumar un número finito de sumandos, e no caso continuo temos que "*sumar*" un número infinito de sumandos infinitesimais, para o que se utiliza o concepto de integral.

Variable estatística →	Variable aleatoria discreta →	Variable aleatoria continua
 $\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot h_i$. $s^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\cdot h_i$.	 $\mu=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot p_i$. $\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\cdot p_i$.	 $\mu=\int_a^b x.f(x)dx$. $\sigma^2=\int_a^b(x-\mu)^2\cdot f(x)dx$.

Sexa X unha variable aleatoria continua definida nun intervalo cerrado $[a,b]$, e sexa $f(x)$ a súa función de densidade.

- A *media da variable continua* X ven dada por:
$$\mu=\int_a^b x\cdot f(x)dx$$
- A *varianza da variable continua* X ven dada por:
$$\sigma^2=\int_a^b(x-\mu)^2\cdot f(x)dx$$
- A *desviación típica da variable continua* X é a raíz cadrada positiva da varianza, e represéntase por σ.
- A media dunha variable continua chámase tamén *esperanza matemática*.

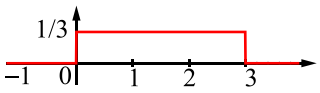
268. Dada a función da dereita, comproba que é unha función de densidade. Calcula a media, a varianza e a desviación típica.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{3}, & 0\le x\le 3\\ 0, & 3<x\end{cases}$$

Solución:

Temos que comprobar que:

- $f(x)\ge 0$ en todo o dominio de definición.
- A área encerrada debaixo da curva de $f(x)$ é a unidade $\leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$.



O que se é evidente e se comproba só analizando a representación gráfica.

Media: $\mu=\int_0^3 x\frac{1}{3}dx=\frac{1}{6}x^2\Big|_0^3=\frac{9}{6}=1.5$.

Varianza: $\sigma = \int_0^3 (x-1.5)^2 \cdot \frac{1}{3} dx = \frac{1}{9}(x-1.5)^3 \Big|_0^3 = 0.75$.

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{0.75} = 0.8660254$.

5.1.1. Valor esperado dunha función dunha variable aleatoria continua

Sexa X unha variable aleatoria continua con función de densidade $f(x)$. Defínese o *valor esperado* de $g(X)$, $E(g(X))$ da seguinte forma:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

269. Examinadas as vendas dun determinado xoguete chégase a conclusión de que a demanda oscila entre 1 millón de unidades e 10 millóns, dependendo do ano.
O beneficio por cada xoguete vendido é de 3 €, mentres que por cada xoguete que se deixa de vender pérdense 0.5 €.
A demanda de xoguetes, expresada en millóns de unidades, é unha variable continua entre 1 e 10 millóns cuxa función de densidade é a adxunta.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}, 1 < x < 10 \\ 0 \text{ no resto} \end{cases}$$

Determina a venda desexable para maximizar o beneficio.

Solución:

Sexa X a variable aleatoria que representa a demanda de xoguetes e sexa P a produción de xoguetes. O beneficio será:

$$B(x) = \begin{cases} 3x - 0.5(P-x) = 3.5x - 0.5P, & \text{se } x \le P \\ 3P & \text{se } x > P \end{cases}$$

Obsérvase que o beneficio $B(x)$ é unha variable aleatoria, posto que depende de X e pretendemos maximizar o beneficio esperado en función da produción P.
O beneficio esperado será:

$$E(B(x)) = \int_1^{10} B(x) f(x) dx = \int_1^P (3.5x - 0.5P)\frac{1}{9} dx + \int_P^{10} 3P \cdot \frac{1}{9} dx = \frac{1}{36}\left(-77 + 122P - 7P^2\right)$$

E para maximizar o beneficio teremos que obter o máximo da función:

$$h(P) = -77 + 122P - 7P^2 \to h'(P) = 122 - 14P = 0 \to P = \frac{122}{14} \approx 8.71; h''(P) = -14 < 0 .$$

Polo tanto, a produción máxima deberá ser de 8.71 millóns de unidades, e o beneficio esperado será de:

$$E(B(x)) = \int_1^{10} B(x) f(x) dx = \frac{1}{36}\left(-77 + 122 \cdot 8.71 - 7 \cdot 8.71^2\right) \approx 14.571 \text{ millóns de euros.}$$

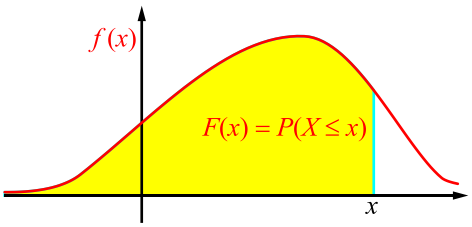
5.2. Función de distribución dunha variable aleatoria continua

Sexa unha variable aleatoria X de tipo continuo que toma un número infinito de valores sobre a recta real, e sexa $f(x)$ a súa función de densidade.

Chámase *función de distribución acumulativa* da variable aleatoria X, e denotarémola por $F(x)$, a probabilidade de que a variable continua X tome valores menores ou iguais a x: é dicir:

$$F(x) = p(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) dx$$

e representa a área limitada pola curva función de densidade $f(x)$ e a esquerda da recta $X = x$, como se ve no gráfico adxunto.



A *función de distribución* dunha variable aleatoria continua é unha función que verifica:

- $F(-\infty) = 0$.
- $F(+\infty) = 1$.
- É non decrecente: $x_i < x_j \to F(x_i) \le F(x_j)$.
- $P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.
- A derivada da función de distribución é a función de densidade: $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$.

270. Unha estación de servizo ten un depósito de gasolina de 2000 litros cheo ao comezo de cada semana. A demanda semanal mostra un comportamento crecente ata chegar aos 1000 litros, e despois mantense entre os 1000 e 2000 litros. Se designamos por X a variable aleatoria que indica a demanda semanal, en miles de litros de gasolina, a función de densidade é a da dereita.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\le x\le 1\\ \frac{1}{2}, & 1<x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$$

270.1. Comproba que $f(x)$ é unha función de densidade.

270.2. Representa graficamente a función de densidade.

270.3. Obtén a función de distribución, e fai a representación gráfica.

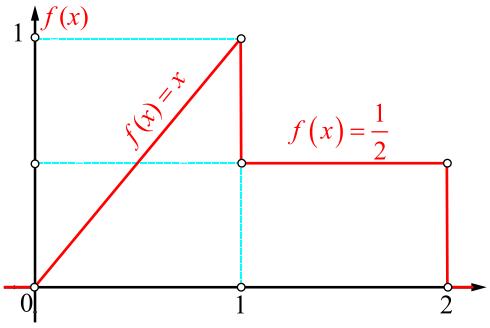
270.4. Calcula xeometricamente a probabilidade de que a demanda sexa maior de 1500 litros nunha semana dada. Obtén tamén o resultado utilizando a función de distribución.

270.5. Calcula xeometricamente a probabilidade de que a demanda se atope entre 750 e 1500 litros unha semana dada. Obtén tamén o resultado utilizando a función de distribución.

Solución:

270.1. I. $f(x)$ é unha función de densidade, xa que $f(x)\ge 0, -\infty<x<+\infty$ e ademais verifícase que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 xdx+\int_1^2 \frac{1}{2}dx =$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\frac{1}{2}[x]_1^2=\frac{1-0}{2}+\frac{1}{2}(2-1)=1.$$



II. Tamén se pode ver que a área encerrada pola función de densidade e o eixe de abscisas é 1. En efecto, a área encerrada é a suma da área dun triángulo rectángulo de catetos de medida 1 unidade e dun rectángulo de base 1 unidade e altura 0.5 unidades.

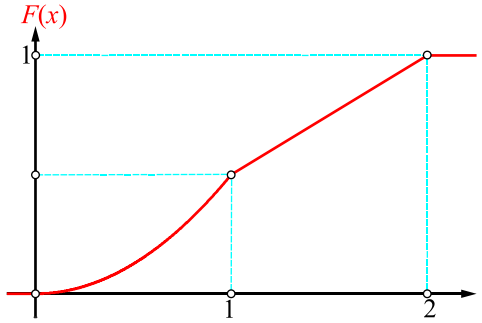
A área total é: $\frac{1\cdot 1}{2}+1\cdot 0.5=0.5+0.5=1$, como queríamos comprobar.

270.2. A representación gráfica da función de densidade é a gráfica anterior.

270.3. A función de distribución é:

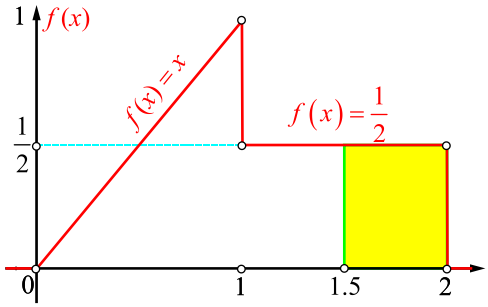
$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx =$$

$$=\int_0^x f(x)dx=\begin{cases}0, & x<0\\ \int_0^x xdx=\frac{x^2}{2}, & 0\le x\le 1\\ \int_0^1 xdx+\int_1^2\frac{1}{2}dx=\frac{x}{2}, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$



270.4. Para calcular xeometricamente a probabilidade de que a demanda sexa maior de 1500 litros nunha semana dada temos que calcular a área da superficie remarcada.

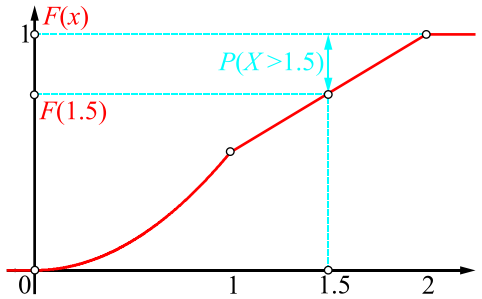
Esa área mide, evidentemente, $0.5\cdot 0.5=0.25$ unidades.



Utilizando a función de distribución, a probabilidade de que a demanda sexa superior a 1500 será:

$$P(X>1500)=1-P(x\le 1500)=1-F(1.5)=1-\frac{1.5}{2}=0.25$$

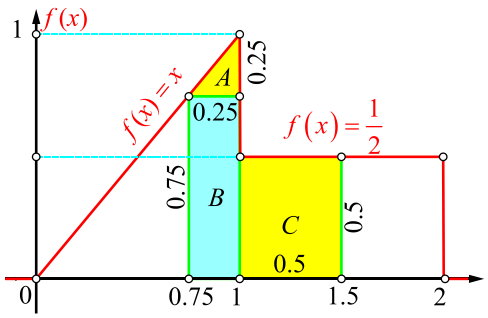
Esta opción aparece ilustrada á dereita.



270.5. A obtención gráfica da probabilidade pedida implica calcular a área encerrada pola función de densidade e o eixe de abscisas, entre eses valores.

Na imaxe esa área aparece remarcada, e descomposta nun triángulo e en dous paralelogramos, para facilitar o cálculo da área:

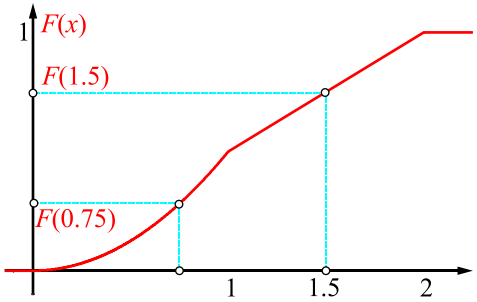
$$\frac{0.25\cdot 0.25}{2}+0.75\cdot 0.25+0.5\cdot 0.5=0.46875 \text{ unidades.}$$



Utilizando a función de distribución, a probabilidade pedida é:

$$P(0.75\le X\le 1.5)=F(1.5)-F(0.75)==\frac{1.5}{2}-\frac{0.75^2}{2}=0.46875.$$

A ilustración deste apartado vese á dereita.



271. Unha magnitude aleatoria X está dada pola función de distribución adxunta. Calcula a probabilidade de que como resultado das probas a magnitude X tome un valor acotado no intervalo aberto $\left(0,\frac{1}{3}\right)$.

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ para } x\le -1\\ \frac{3}{4}x+\frac{3}{4}, \text{ para } -1<x\le \frac{1}{3}\\ 1, \text{ para } x>\frac{1}{3}\end{cases}$$

Solución:

A probabilidade de que X tome un valor comprendido no intervalo (a,b) é igual ao incremento da función de distribución nese intervalo: $p(a<X<b)=F(b)-F(a)$. Tomando $a=0$ e $b=\frac{1}{3}$ tense:

$$P\left(0<X<\tfrac{1}{3}\right)=F\left(\tfrac{1}{3}\right)-F(0)=\left(\tfrac{3}{4}x+\tfrac{3}{4}\right)\Big|_{x=\frac{1}{3}}-\left(\tfrac{3}{4}x+\tfrac{3}{4}\right)\Big|_{x=0}=\frac{1}{4}.$$

272. Dada a función de densidade da magnitude aleatoria continua X adxunta, obtén a correspondente función de distribución.

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ para } x\le 0,\\ \cos(x) \text{ para } 0<x\le \frac{\pi}{2},\\ 0 \text{ para } x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Solución:

Úsase a fórmula $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$.

Se $x\le 0$, tense que $f(x)=0 \;\rightarrow\; F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\,dx=0$.

Se $0<x\le \frac{\pi}{2}$ entón $F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{x}\cos(x)\,dx=\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(0)=\operatorname{sen}(x)$.

Se $x>\frac{\pi}{2}$ entón: $F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{\pi/2}\cos(x)\,dx+\int_{\pi/2}^{x} 0\,dx=0+\operatorname{sen}(x)\Big|_{0}^{\pi/2}+0=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

Polo tanto, a función de distribución é $F(x)=\begin{cases}0 \text{ para } x\le 0,\\ \operatorname{sen}(x) \text{ para } 0<x\le \frac{\pi}{2},\\ 1 \text{ para } x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

273. Dada a función de distribución adxunta, obtén a correspondente función de densidade.

$$F(x)=\begin{cases}0 \text{ para } x\le 0,\\ \operatorname{sen}(x) \text{ para } 0<x\le \frac{\pi}{2},\\ 1 \text{ para } x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Solución:

Tense que $f(x)=F'(x)$.

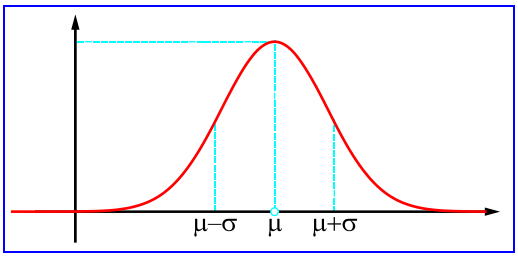
$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 \text{ para } x\le 0,\\ \cos(x) \text{ para } 0<x\le \frac{\pi}{2},\\ 0 \text{ para } x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Hai que remarcar que para $x=0$ non existe a derivada de $F'(x)$, dado que $\cos(0)=1$.

5.3. Distribución normal

A *distribución normal* ou *distribución de Gauss* é, sen dúbida algunha, a máis importante e a de máis aplicación de tódalas distribucións continuas.

A distribución normal ten este nome porque durante moito tempo se pensou que ese era o comportamento "*normal*" de todos os fenómenos.



Críase que tódalas distribucións eran normais.

Esta distribución é bastante adecuada para describir a distribución de moitos conxuntos de datos que ocorren na natureza, na industria, na economía, na investigación, ….

Así, en xeral, para os seguintes conxuntos de datos pódese considerar adecuada a distribución normal:

- Datos meteorolóxicos correspondentes a temperaturas, choiva, …
- Carácteres sociolóxicos: o consumo de certos produtos por individuos dun mesmo grupo humano, as cualificacións correspondentes a probas de actitude, …
- Carácteres morfolóxicos de individuos (persoas, animais, plantas) dunha mesma raza: as alturas de individuos dunha idade e sexo dado, os pesos. …
- Carácteres fisiolóxicos: os efectos dunha mesma dose de fármaco, de fertilizante, …
- As medidas físicas de produtos manufacturados.
- Características físicas: a vida media dun tipo de lámpadas para unha voltaxe dada, …
- En xeral, calquera característica que se obteña como suma de moitos factores.

☠ Non obstante, hai que ter coidado ao supoñer que un determinado conxunto de observacións se pode aproximar por unha distribución normal, pois é necesario comprobalo previamente.

274. Clasifiquemos a tódolos cidadáns galegos segundo o seu nivel de renda; evidentemente, son moi poucos galegos os que teñen niveis de rendas altas e son moitos os que posúen niveis de rendas baixas. Polo tanto, a distribución non é simétrica e, en consecuencia, non se adapta ao modelo normal.

✍ Máis importante co feito de que a normal poida utilizarse para aproximar a distribución de algunhas medidas é o feito de que *en moitos casos a distribución das medias mostrais será aproximadamente normal* (pode verse o *Teorema Central do Límite* [123]).

✍ Unha variable aleatoria X, de tipo continuo, segue unha *distribución normal* de parámetros μ e σ se a súa *función de densidade* é:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<+\infty$$

onde $\mu,\sigma\in\mathbb{R}$ e tales que $-\infty<\mu<+\infty$ e $\sigma>0$, sendo π a constante de relación entre a lonxitude dunha circunferencia e o seu diámetro e e a base dos logaritmos neperianos; é dicir $\pi=3.14159\cdots$, $e=2.71828\cdots$

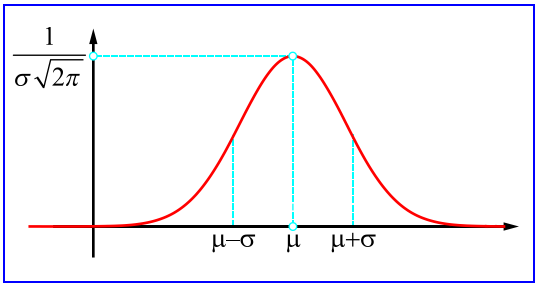
- Acostuma a designarse por $X\to N(\mu,\sigma)$.

Verifícase que:

- μ é a media da variable aleatoria X.
- σ é a desviación típica da variable aleatoria X.

5.3.1. Propiedades gráficas da normal

A distribución normal tamén verifica as seguintes propiedades, que non demostramos:



- $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.
- $f(x)$ é continua en toda a recta real $\mathbb{R}$.
- $f(x)$ é *simétrica* respecto de $x=\mu$, é dicir: $f(\mu-x)=f(\mu+x)$.

- $f(x)$ ten como *asíntota horizontal* o eixe de abscisas, xa que se verifica que:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right) = 0 \quad .$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right) = 0 \quad .$$

Este feito vese claramente na representación gráfica anterior.

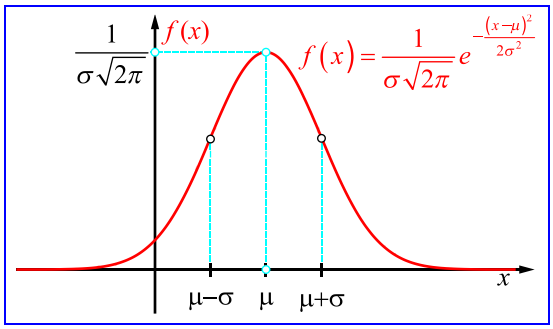
- $f(x)$ é estritamente crecente para $x<\mu$ e estritamente decrecente para $x>\mu$.

- $f(x)$ presenta un máximo para $x=\mu$, e ese máximo vale $f(\mu)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$; é dicir, o punto $\left(\mu,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$ é un punto máximo; $\left(\mu,\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)\approx\left(\mu,\frac{0.39894}{\sigma}\right)\approx\left(\mu,\frac{0.399}{\sigma}\right)$.

- $\begin{cases} x<\mu-\sigma \to f(x) \text{ convexa.} \\ x=\mu-\sigma \to \text{punto de inflexión.} \\ \mu-\sigma<x<\mu+\sigma \to f(x) \text{ concava.} \\ x=\mu+\sigma \to \text{punto de inflexión.} \\ x>\mu+\sigma \to f(x) \text{ convexa.} \end{cases}$

- $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty<x<+\infty$ función de distribución $\to \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=1$;

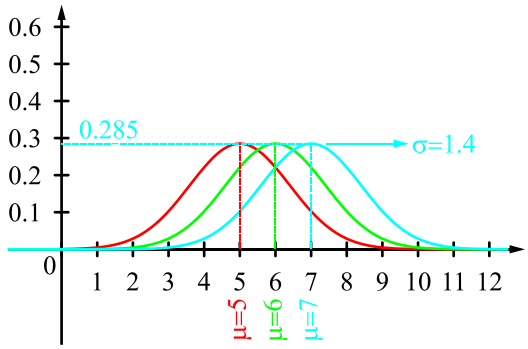
é dicir, a área que encerra unha $N(\mu,\sigma)$ e o eixe de abscisas é a unidade.



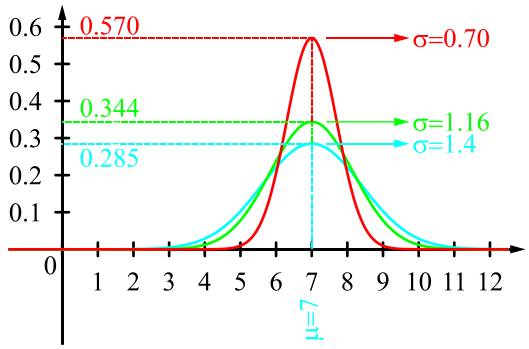
Obsérvase que a gráfica da función de densidade normal ten forma de campá, e por iso a esta curva chámaselle frecuentemente *campá de Gauss*.

Tamén é claro que o parámetro μ se corresponde ao máximo e ao centro da distribución e o parámetro σ da o grao de apertura ou aplastamento da curva $f(x)$.

Vexamos uns exemplos de representacións da campá de Gauss.



Na imaxe superior temos a representación gráfica de curvas normais, con distinta media e a mesma desviación típica. Teñen a mesma forma pero están centradas en diferentes posicións do eixe de abscisas.



Enriba está a gráfica de curvas normais coa mesma media pero con distinta desviación típica. Están centradas na mesma posición do eixe de abscisas, pero a curva con maior desviación é a máis aplastada e presenta maior dispersión.

5.3.1. Relación entre a $N(\mu,\sigma)$ e a $N(0,1)$

A expresión

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty$$

danos a función de densidade dunha *familia de distribucións normais* para os diferentes valores das variables μ e σ. Dentro desta familia de distribucións hai unha moi importante, que corresponde cos valores dos parámetros $\mu=0$, $\sigma=1$, é dicir, a $N(0,1)$.

A distribución normal $N(0,1)$ chámase *distribución normal tipificada* ou *estándar*. A función de densidade é:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty$$

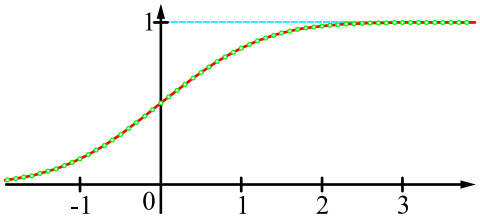
5.3.2. Función de distribución dunha normal

A *función de distribución* dunha variable aleatoria X distribuída segundo unha $N(\mu,\sigma)$ é:

$$F(x)=p(X\le x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx,-\infty<x<+\infty$$

Ao carón representamos a *función de distribución* dunha variable aleatoria distribuída segundo unha $N(0,1)$:

$$\Phi(x)=p(X\le x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$



5.3.3. Tipificación dunha normal $N(\mu,\sigma)$

A integral

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

só pode calcularse mediante métodos numéricos aproximados.

Para non integrar continuamente poderíamos facer táboas para cada par de valores μ e σ, pero iso conlevaría unha infinidade de táboas, co que o desarrollo desa idea é practicamente imposible.

A maneira de simplificar esta infinidade de táboas é "*tipificando*" todas estas variables aleatorias con $N(\mu,\sigma)$ a unha "*equivalente*" que teñas as característica $N(0,1)$.

Para iso, utilizamos os seguintes resultados, que non demostraremos:

Se X é unha variable aleatoria con distribución $N(\mu,\sigma)$, entón a *variable aleatoria tipificada* Z:

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

segue unha distribución $N(0,1)$.

Se Z é unha variable aleatoria con distribución $N(0,1)$, entón a variable aleatoria X

$$X=\sigma Z+\mu$$

segue unha distribución $N(\mu,\sigma)$.

A nova variable Z tipificada é *adimensional*:

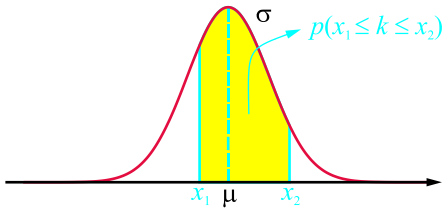
$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

É dicir, non ten asociada unidades de medida e pódese comparar directamente con outras variables tipificadas.

Por ser $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty<x<+\infty$ unha función de densidade sabemos que a área encerrada baixo a curva vale a unidade; é dicir:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=1$$

Ademais sabemos que a área baixo a curva función de densidade limitada polas coordenadas correspondentes a x_1 e x_2 é igual á probabilidade de que a variable aleatoria tome valores comprendidos entre x_1 e x_2; é dicir:



$$p(x_1\le X\le x_2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

Tendo en conta que co proceso de tipificación dunha variable aleatoria $N(\mu,\sigma)$ podemos reducir tódalas distribucións $N(\mu,\sigma)$ a unha $N(0,1)$ e tabular unicamente a distribución $N(0,1)$, non producíndose variación algunha na área limitada baixo a curva normal e os valores dados.

Polo tanto, se a variable aleatoria X se distribúe segundo unha normal $N(\mu,\sigma)$, sabemos que:

$$p(x_1\le X\le x_2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

E tipificando a variable X, temos:

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\rightarrow Z\rightarrow N(0,1)$$

e polo tanto:

$$p(x_1\le X\le x_2)=p\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\le\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)=p\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\le Z\le\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{x_1-\mu}{\sigma}}^{\frac{x_2-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\Phi\left(\frac{x_2-\mu}{s}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-\mu}{s}\right)$$

onde Φ representa a *distribución* da variable aleatoria *Z*:

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

275. Consideremos unha variable aleatoria X distribuída segundo unha distribución normal de media 40 e de desviación típica 3, $N(40,3)$. Calcula $p(43\le X\le 46)$.

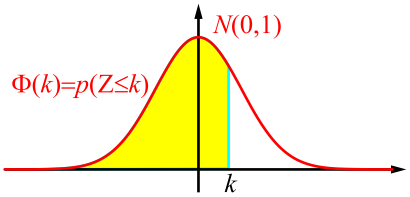
Solución:

Comezamos realizando o proceso de tipificación:

$p(43\le X\le 46)=p\left(\frac{43-40}{3}\le\frac{X-40}{3}\le\frac{46-40}{3}\right)=p(1.0\le Z\le 2.0)=\Phi(2.0)-\Phi(1.0)==0.9772-0.8413=0.1359$, resultados para $\Phi(2.0)$ e para $\Phi(1.0)$ que obtemos consultando a táboa seguinte.

5.3.4. Táboa de áreas baixo a curva normal $N(0,1)$

Na distribución $N(0,1)$ a variable represéntase por Z e a súa distribución por Φ.



Na táboa adxunta aparecen as probabilidades $p(Z \le k)$, con $0 \le k \le 4$, de centésima en centésima.
O valor de k búscase así:

Unidades e décimas: columna da esquerda
Centésimas: na fila de arriba.

Φ		Centésimas									
	k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Unidades e décimas	0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
	0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
	0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
	0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
	0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
	0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
	0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
	0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
	0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
	0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
	1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
	1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
	1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
	1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
	1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
	1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
	1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
	1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
	1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
	1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
	2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
	2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
	2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
	2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
	2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
	2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
	2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
	2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
	2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
	2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
	3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
	3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
	3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
	3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
	3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
	3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
	3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
	3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
	3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
	3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Existen outras táboas que engaden valores negativos, pero dado que a distribución normal é completamente simétrica con respecto a $\mu = 0$ é suficiente considerar a táboa só para valores positivos, tendo en conta que $\Phi(-Z) = 1 - \Phi(Z)$.

276. Calcula $p(Z \le -0.11)$.

Solución:

$p(Z \le -0.11) = p(Z \ge 0.11) = 1 - p(Z \le 0.11) = 1 - \Phi(0.11) = 1 - 0.5438 = 0.4562$.

277. Dada unha distribución normal estándar, calcula a área baixo a curva normal que está:

277.1. Á esquerda de 1.78.

277.2. Á dereita de 0.76.

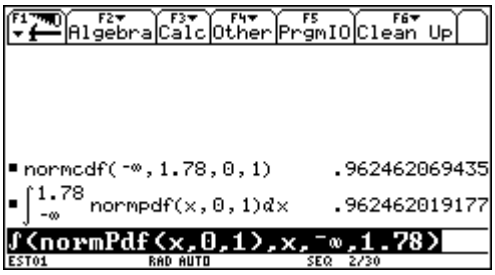
277.3. Á esquerda de -1.45.

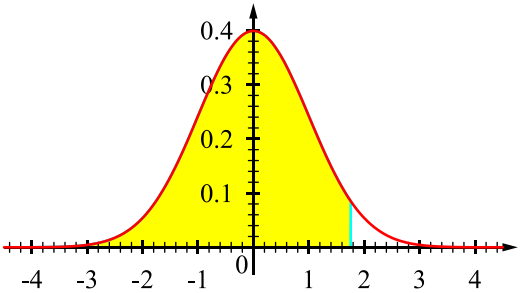
277.4. Entre 0.25 e 2.65.

277.5. Entre -1.24 e 1.85.

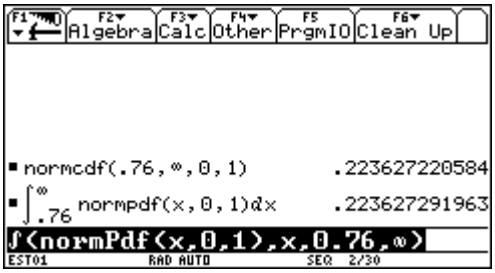
Solución:

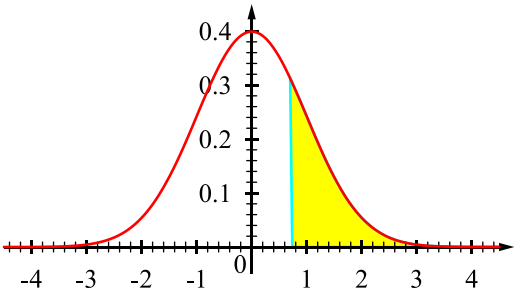
277.1. $p(Z \le 1.78) = \Phi(1.78) \approx 0.9625$.



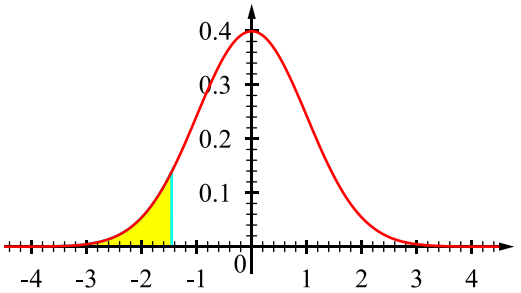


277.2. $p(z \ge 0.76) = 1 - p(Z \le 0.76) = 1 - \Phi(0.76) \approx 1 - 0.7764 = 0.2236$.

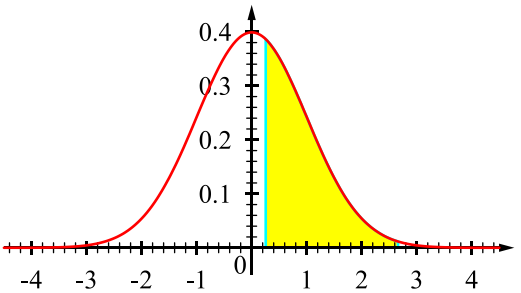




277.3. $p(Z \le -1.45) = p(Z \ge 1.45) = 1 - p(Z \le 1.45) = 1 - \Phi(1.45) \approx$
$\approx 1 - 0.9265 = 0.0735$.

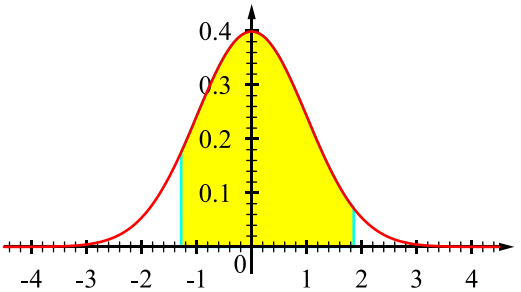


277.4. $p(0.25 \le Z \le 2.65) = p(Z \le 2.65) - p(Z \le 0.25) =$
$= \Phi(2.65) - \Phi(0.25) \approx 0.9960 - 0.5987 = 0.3973$.



277.5. $p(-1.24 \le Z \le 1.85) = p(Z \le 1.85) - p(Z \le -1.24) =$
$= p(Z \le 1.85) - p(Z \ge 1.24) = p(Z \le 1.85) - (1 - p(Z \le 1.24)) =$
$= \Phi(1.85) - 1 + \Phi(1.24) \approx 0.9678 - 1 + 0.8925 = 0.8603$.

$\text{normCdf}(-1.24, 1.85, 0, 1) = 0.860355524844$



A función $\text{normCdf}(ExtrInf, ExtrSup[, \mu[, \sigma]])$ calcula a probabilidade da distribución normal entre $ExtrInf$ e $ExtrSup$ para os valores de μ e σ (predeterminados $\mu = 0$ e $\sigma = 1$).

278. Dada unha distribución $N(0,1)$, obter o valor de k tal que:

278.1. $p(Z \geq k) = 0.2946$.

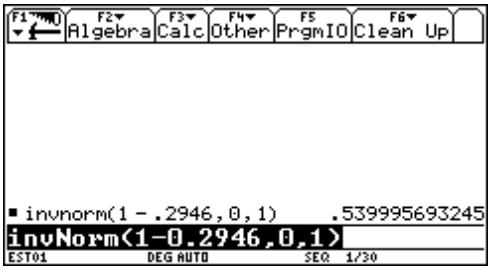
278.2. $p(Z \leq k) = 0.2709$.

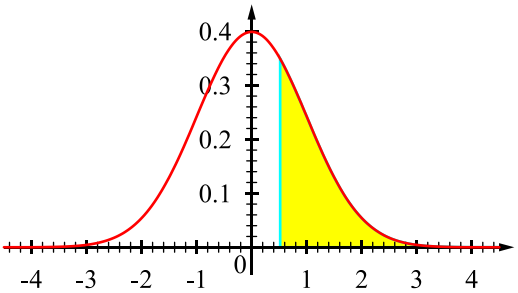
278.3. $p(Z \geq k) = 0.9726$.

278.4. $p(k \leq Z \leq -0.18) = 0.4199$.

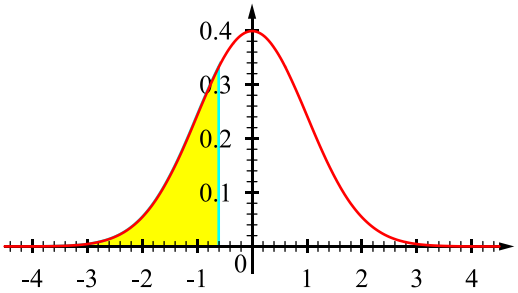
Solución:

278.1. Observamos no gráfico que o valor de k que deixa unha área de 0.2946 á dereita deberá deixar á esquerda de k unha área de $1-0.2946=0.7054$, tendo entón que $p(Z \leq k) = \Phi(k) =$ $= 0.7054$, e buscando este valor na táboa tense que $k = 0.54$.

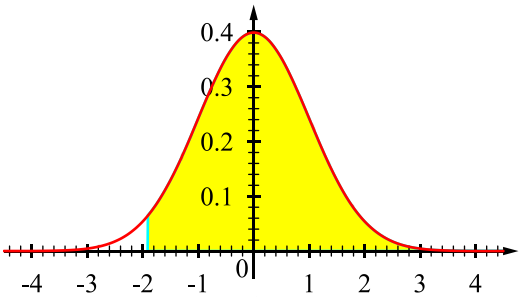




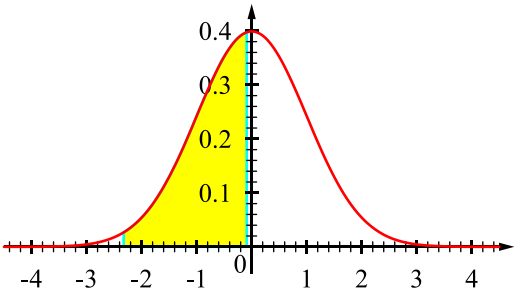
278.2. $p(Z \leq k) = \Phi(k) = 0.2709$; mirando na táboa vese que o menor valor é 0.5000, polo que k debe ser negativo, e por iso debemos buscar o seu simétrico: $p(Z \geq k) = 0.2709$; $1-0.2709 = 0.7291$ e así $p(Z \leq k) = \Phi(k) = 0.7291$, que se obtén de $0.61 \rightarrow k = -0.61$.



278.3. $p(Z \geq k) = 0.9726 \rightarrow$ a área que deixa á dereita de k é maior ca 0.5000, e polo tanto, o valor de k será negativo $\rightarrow$ obtemos o simétrico de k:
$p(Z \leq k) = 0.9726 \rightarrow \Phi(k) = 0.9726 \rightarrow k = -1.92$.



278.4. $p(k \leq Z \leq -0.18) = 0.4199 \rightarrow p(Z \leq -0.18) - p(Z \leq k) =$
$= p(Z \geq 0.18) - p(Z \leq k) = 1 - p(Z \leq 0.18) - p(Z \leq k) =$
$= 1 - 0.5714 - p(Z \leq k) = 0.4199 \rightarrow p(Z \leq k) = 0.0087$, que é negativo $\rightarrow$ o seu simétrico é: $1-0.0087 = 0.9913$, que se corresponde con $2.38 \rightarrow k = -2.38$.



A función $\text{invNorm}\left(\textit{Área}\left[,\mu\left[,\sigma\right]\right]\right)$ calcula a función de distribución acumulada normal inversa dunha *Área* dada baixo a curva de distribución normal especificada por μ e σ (predetermindos os valores $\mu = 0$ e $\sigma = 1$).

279. Unha compañía dedicada á exportación de froitas e hortalizas observou que o peso dos melóns que cultiva para exportación seguen unha distribución normal de media 1700 gramos e desviación típica de 100 gramos. Deséxase coñecer:

279.1. A proporción de melóns que pesan menos de 1500 gramos ou máis de 2000 gramos.

279.2. Sabendo que son rexeitados para a exportación aqueles melóns cuxo peso difire en máis de 300 gramos do peso medio, determina a proporción de melóns que se rexeitan.

Solución:

Sexa X o peso dos melóns. Entón coñécese que X segue unha distribución normal de media $\mu = 1700$ e desviación típica $\sigma = 100$, é dicir: $X \rightarrow N(1700,100)$.

279.1. A proporción de melóns que pesan menos de 1500 gramos ou máis de 2000 gramos obtense da probabilidade da unión dos sucesos incompatibles $(X<1500)\cup(X>2000)$; é dicir

$$p\big((X<1500)\cup(X>2000)\big)=p(X<1500)+p(X>2000)=$$

$$=p\left(\frac{X-1700}{100}<\frac{1500-1700}{100}\right)+p\left(\frac{X-1700}{100}>\frac{2000-1700}{100}\right)=p(Z\le-2)+p(Z\ge3)=p(Z\le2)+1-p(Z\le3)=$$

$$=\Phi(-2)+1-\Phi(3)=1-\Phi(2)+1-\Phi(3)=1-0.9772+1-0.9987=0.0241.$$

279.2. A proporción de melóns que se rexeitará será:

$$p\big(|X-1700|>300\big)=1-p\big(|X-1700|\le300\big)=1-p(1400\le X\le2000)=$$

$$=1-p\left(\frac{1400-1700}{100}\le\frac{X-1700}{100}\le\frac{2000-1700}{100}\right)=1-p(-3\le Z\le3)=1-\big(\Phi(3)-\Phi(-3)\big)=1-\Phi(3)+\Phi(-3)=$$

$$=1-\Phi(3)+1-\Phi(3)=2-2\Phi(3)=2-2\cdot0.9987=0.0026.$$

Polo tanto, a proporción pedida é $p=0.26\%$.

5.3.5. Caso particular

En moitos casos, dada unha variable aleatoria X distribuída segundo unha $N(\mu,\sigma)$ interésanos coñecer as seguintes probabilidades:

① $p(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma)$. ② $p(\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma)$. ③ $p(\mu-3\sigma\le X\le\mu+3\sigma)$.

Para calcular esas probabilidades basta con tipificar a variable $N(\mu,\sigma)$ a unha $N(0,1)$ para poder empregar a táboa anterior.

① $$p(\mu-\sigma\le X\le\mu+\sigma)=p\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma}\le\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right)=p(-1\le Z\le1)=\Phi(1)-\Phi(-1)=\Phi(1)-\big(1-\Phi(1)\big)=$$

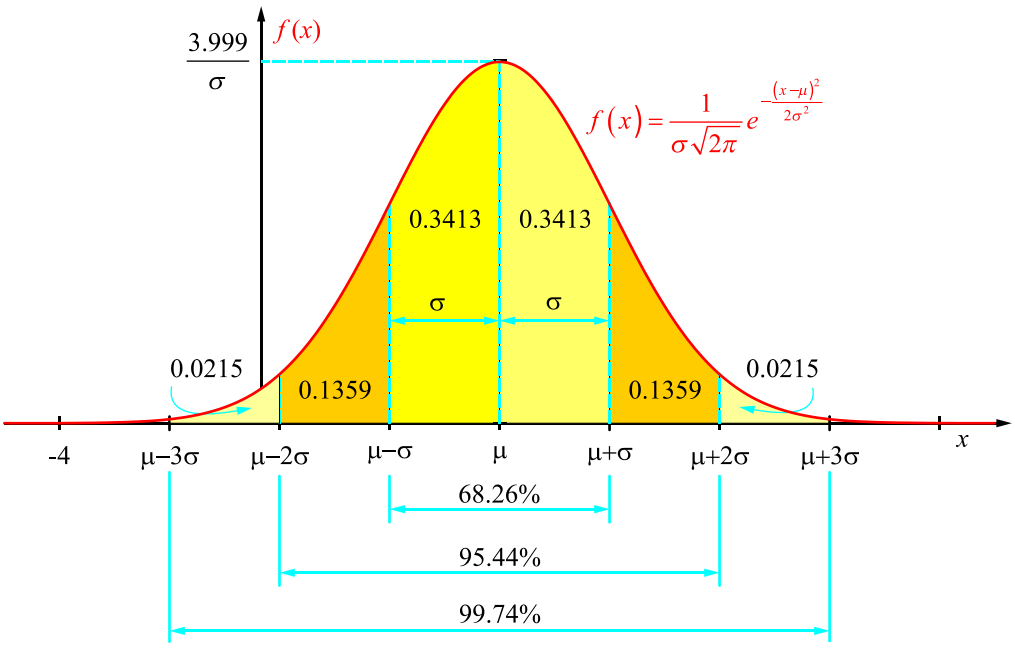
$$=\Phi(1)-1+\Phi(1)=2\cdot\Phi(1)-1=2\cdot0.8413-1=0.6826.$$

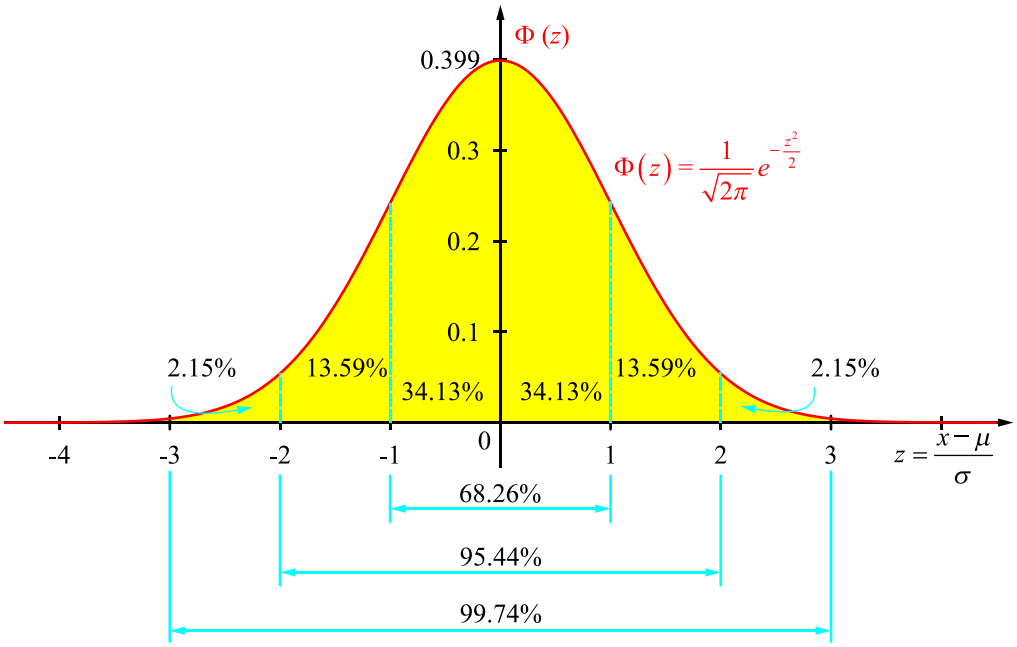
Isto tamén se pode expresar da forma: $\boxed{p\big(|X-\mu|\le\sigma\big)=0.6826 \qquad p\big(|X-\mu|>\sigma\big)=0.3174.}$

Esta última observación $p\big(|X-\mu|>\sigma\big)=0.3174$ indica que o 31.74% dos valores da variable $N(\mu,\sigma)$ difiren da súa media en máis dunha vez a súa desviación típica.

② Analogamente se obtén que $p(\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma)=0.9544$, e as súas equivalencias: $p\big(|X-\mu|\le2\sigma\big)=0.9544$ ou ben $p\big(|X-\mu|>2\sigma\big)=0.0456$, é dicir, o 4.56% dos valores da variable $N(\mu,\sigma)$ difiren da súa variable en máis de dúas veces a súa desviación típica.

③ Tamén se ten que $p(\mu-3\sigma\le X\le\mu+3\sigma)=0.9974\rightarrow p\big(|X-\mu|\le3\sigma\big)=0.9974\rightarrow p\big(|X-\mu|>3\sigma\big)=0.0026$, que indica que só o 0.26% dos valores da variable $N(\mu,\sigma)$ difiren da súa media en máis de tres veces a desviación típica.





Esta figura indica que a porcentaxe de área debaixo da curva normal tipificada $\Phi(z)$ e de aí tamén baixo a correspondente curva de densidade para a distribución normal X é do: 68.26% para $-1 \le z \le 1$ e para $\mu-\sigma \le x \le \mu+\sigma$. 95.44% para $-2 \le z \le 2$ e para $\mu-2\sigma \le x \le \mu+2\sigma$. 99.74% para $-3 \le z \le 3$ e para $\mu-3\sigma \le x \le \mu+3\sigma$.	**Regra 68–95–99.7** Nunha poboación normalmente distribuída, o 68 % da poboación (aproximadamente) está dentro *dunha desviación* típica da media, o 95% de *dúas desviacións* da media e o 99.7% de *tres desviacións* da media.

280. As cualificacións finais nunha determinada asignatura seguen unha distribución normal con media $\mu=6.5$ e desviación típica $\sigma=2$. Se o 10% de alumnos obteñen a cualificación de "*sobresaínte*", cal será a cualificación máis baixa para sobresaínte?

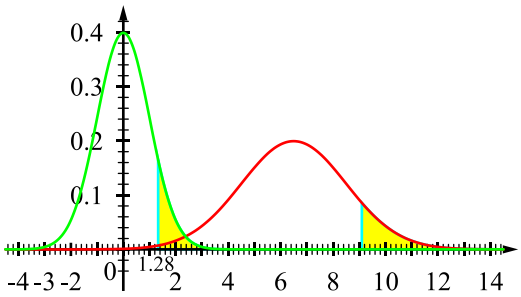
Solución:

Partimos dunha distribución $N(6.5,2)$. Temos que buscar o valor de k tal $p(X \ge k)=0.1$; para iso tipificamos e pasamos a unha $N(0,1)$.

$p\left(\frac{x-6.5}{2} \ge \frac{k-6.5}{2}\right)=0.1 \rightarrow p\left(Z \ge \frac{k-6.5}{2}\right)=0.1 \rightarrow$ a área á esquerda de $\frac{k-6.5}{2}$ na $N(0,1)$ será de $1-0.1=0.9$; entón temos:

$p\left(Z \le \frac{k-6.5}{2}\right)=0.9 \rightarrow \Phi\left(\frac{k-6.5}{2}\right)=0.9 \rightarrow \frac{k-6.5}{2} \approx 1.28 \rightarrow$

$\rightarrow k=2\cdot 1.28+6.5 \rightarrow k=9.06$.



A nota mínima para sobresaínte é de 9.06.

281. Sexa unha variable aleatoria X distribuída segundo unha normal con media $\mu=50$ e desviación típica $\sigma=8$. Obtén:

281.1. A probabilidade de que a variable aleatoria X tome valores entre 38 e 58.

281.2. A probabilidade de que a variable aleatoria X tome un valor maior que 66.

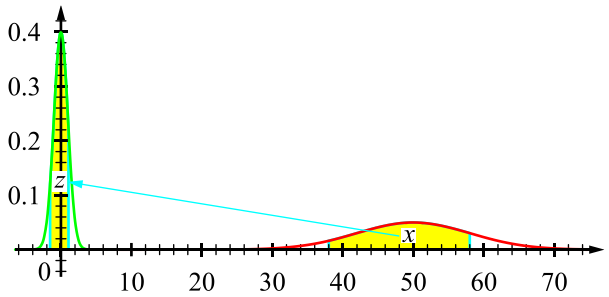
Solución:

281.1. Temos que tipificar a variable X que é $N(50,8)$ para pasar a unha variable Z que sexa $N(0,1)$. Así temos:

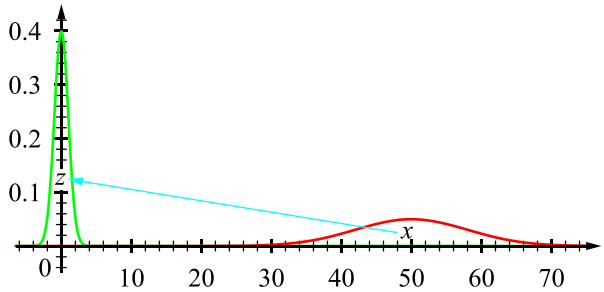
$$p(38 \le X \le 58) = p\left(\frac{38-50}{8} \le \frac{X-50}{8} \le \frac{58-50}{8}\right)=$$

$$= p(-1.5 \le Z \le 1)=\Phi(1)-\Phi(-1.5)= \Phi(1)-(1-\Phi(1.5))=$$

$$= \Phi(1)-1+\Phi(1.5)= 0.8413-1+0.9332 = 0.7745.$$



$$\text{normCdf}(38,58,50,50,8)=0.774537511717$$



281.2. Tamén temos que tipificar a variable X que é $N(50,8)$ para pasar a unha variable Z que sexa $N(0,1)$. Así temos:

$$p(X\geq 66) = p\left(\frac{X-50}{8}\geq\frac{66-50}{8}\right) = p(Z\geq 2) =$$
$$= 1-p(Z\leq 2) = 1-\Phi(2) = 1-0.9772 = 0.0228.$$

282. Supoñemos que a demanda semanal dun produto segue unha distribución normal de media $\mu=100$ e desviación típica $\sigma=20$. Que existencias debe ter ao comezo da semana par poder satisfacer a demanda cunha probabilidade do 0.95?

Solución:

Sexa X a variable aleatoria que representa a demanda do artigo e sabemos que $X\to N(100,20)$. Temos que obter o valor de k de X tal que $p(X\leq k)=0.95$.

Tipificando tense:

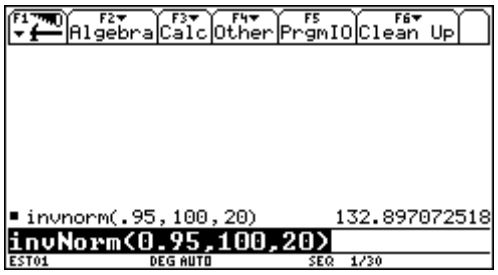
$$p\left(\frac{X-100}{20}\leq\frac{k-100}{20}\right)=0.95 \to p\left(Z\leq\frac{k-100}{20}\right)=0.95 \to \Phi\left(\frac{k-100}{20}\right)=0.95.$$

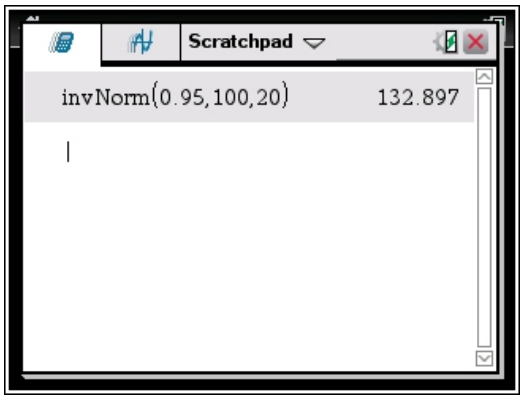
Buscando na táboa vemos que non nos coincide nin 1.64 nin 1.65 e interpolando temos:

$$\frac{1.64+1.65}{2}=1.645 \to \frac{k-100}{20}=1.645 \to k=20\cdot 1.645+100=132.9 \to k=133.$$

Polo tanto, as existencias ao comezo da semana debe ser de 133 unidades para poder ter unha probabilidade do 0.95 de poder satisfacer a demanda.

Facemos os cálculos con calculadora para comprobar a os resultados obtidos, e tamén para estimular o uso das calculadoras neste tema.





5.3.6. Outras propiedades da distribución normal

A continuación resúmense unha propiedades importantes da distribución normal que non se demostran, xa que a súa demostración excede os intereses deste documento.

Se X_1, X_2, …, X_n son n variables aleatorias independentes, distribuídas segundo unha $N(\mu_1,\sigma_1)$, para $i=1,2,\ldots$ …, n e si a_1, a_2, …, a_n e b son números reais, entón a variable aleatoria

$$y=a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n+b$$

segue unha distribución $N\left(a_1\mu_1+a_2\mu_2+\cdots+a_n\mu_n+b,\sqrt{a_1^2\sigma_1^2+a_2^2\sigma_2^2+\cdots+a_n^2\sigma_n^2}\right)$.

Propiedade reprodutiva. A suma de n variables aleatorias independentes X_1, X_2, …, X_n e distribuídas segundo unha $N(\mu_1,\sigma_1)$, para $i=1,2,\ldots,n$ segue unha distribución

$$N\left(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots+\sigma_n^2}\right)$$

Se X_1, X_2, …, X_n son n variables aleatorias independentes e identicamente distribuídas segundo unha $N(\mu.\sigma)$, entón a variable aleatoria suma das $n-$variables

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

segue unha distribución $N\left(n\mu, \sqrt{n}\sigma\right)$.

Se X_1, X_2, …, X_n son n variables aleatorias independentes e identicamente distribuídas segundo unha $N(\mu.\sigma)$, entón a variable aleatoria media aritmética das $n-$variables

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

segue unha distribución $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

283. Sexa un certo mecanismo composto de tres pezas. Ditas pezas actúan de forma consecutiva e independente, é dicir, se se avaría a primeira entra en funcionamento a segunda e así sucesivamente, garantindo un maior tempo de funcionamento do mecanismo.

A duración das respectivas pezas, expresadas en horas, distribúense segundo as distribucións normais $X_1 \to N\left(120, \sqrt{0.02}\right)$, $X_2 \to N\left(240, \sqrt{0.03}\right)$, $X_3 \to N\left(180, \sqrt{0.04}\right)$. Determina a probabilidade de que o mecanismo estea funcionando ininterrompidamente entre 538 e 548 horas.

Solución:

A variable aleatoria Y, suma dos tempos de duración das tres pezas, $X_1 + X_2 + X_3$ distribúese segundo unha normal de media e varianza:

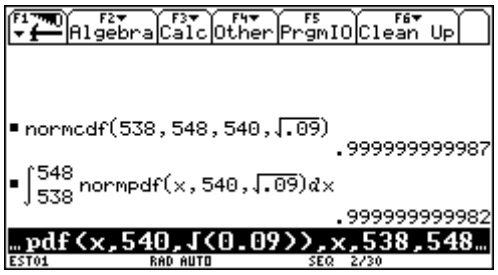
$$\left.\begin{array}{l} E(Y) = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 120 + 240 + 180 = 540 \\ \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = 0.02 + 0.03 + 0.04 = 0.09 \end{array}\right\} \to N\left(540, \sqrt{0.09}\right) \to Y \to N(540, 0.3).$$

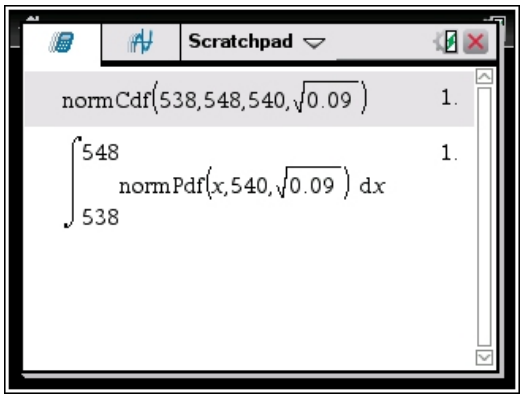
A probabilidade pedida é: $p(538 \le Y \le 548) = p\left(\frac{538-540}{0.3} \le \frac{Y-540}{0.3} \le \frac{548-540}{0.3}\right) =$

$= p(-6.67 \le Z \le 26.67) = p(Z \le 26.67) - p(Z \le -6.67) = p(Z \le 26.67) - p(Z \ge 6.67) =$

$= p(Z \le 26.67) + 1 - p(Z \le 6.67) = \Phi(26.67) + 1 - \Phi(6.67) \approx 1 + 1 - 1 = 1.$

Utilízanse as calculadoras habituais para facer os cálculos e comprobar os resultados obtidos nos cálculos manuais.





A función normPdf$\left(XVal\left[,\mu\left[,\sigma\right]\right]\right)$ calcula a función de densidade para un valor $XVal$ especificada para μ e σ dados.

Non debe confundirse con invNorm$\left(Área\left[,\mu\left[,\sigma\right]\right]\right)$.

5.4. Aproximación normal á distribución binomial

A probabilidade binomial

$$p(\text{obter } k \text{ éxitos}) = p(X = k) \equiv p_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

resulta cada vez máis difícil de calcular a medida que n aumenta. Sen embargo, hai unha maneira de aproximar $p(k)$ por medio da distribución normal cando non se pode realizar un cálculo exacto na práctica.

5.4.1. Histograma de probabilidade para *B*(*n*,*p*)

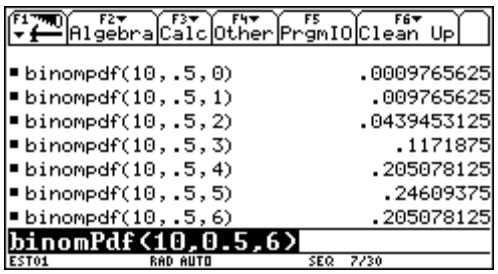
284. Compara os histogramas de probabilidade das $B(10,0.1)$, $B(10,0.5)$ e $B(10,0.7)$.

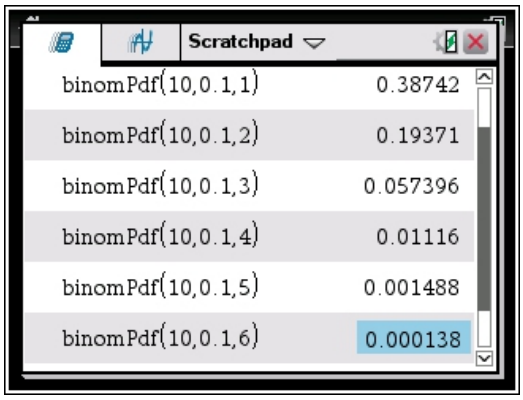
Solución:

Fagamos os histogramas de probabilidade para $B(10,0.1)$, $B(10,0.5)$ e $B(10,0.7)$; para iso é necesario facer os cálculos correspondentes.

k	$\binom{10}{k}0.1^k \cdot 0.9^{10-k}$	$\binom{10}{k}0.5^k \cdot 0.5^{10-k}$	$\binom{10}{k}0.7^k \cdot 0.3^{10-k}$
0	0.3486784401	0.0009765625	$5.9049 \cdot 10^{-6}$
1	0.3874204890	0.009765625	0.00137781
2	0.1937102445	0.0439453125	0.0014467005
3	0.057395628	0.1171875	0.00001692
4	0.0014880348	0.205078125	0.036756909
5	0.0014880348	0.24609375	0.1029193452
6	0.0001377809	0.205078125	0.200120949
7	$8.748 \cdot 10^{-6}$	0.1171875	0.266827932
8	$3.645 \cdot 10^{-7}$	0.0439453125	0.2334744405
9	$8.99999 \cdot 10^{-9}$	0.009765625	0.1210608209
10	$1.00 \cdot 10^{-10}$	0.0009765625	0.0282475249

Facemos os cálculos coas calculadoras TI que utilizamos habitualmente. Os cálculos sen estes medios técnicos son bastante pesados.

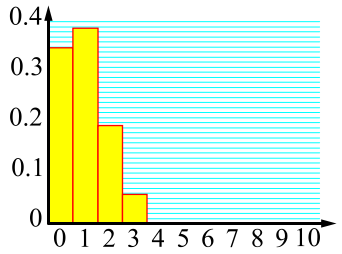
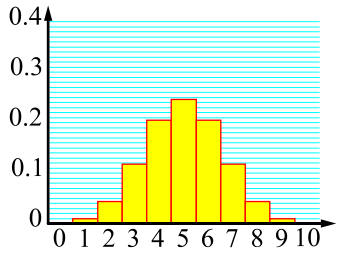
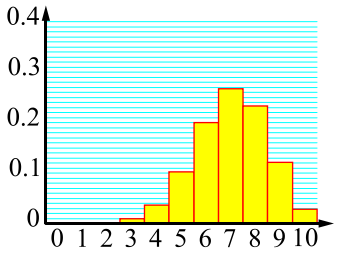




A función $\text{binomPdf}(n, p[, XVal])$ calcula a probabilidade para a distribución binomial discreta para un número de probas n e probabilidade de éxito p en cada caso.

Se non se engade $XVal$ a función devolve unha lista con todos os resultados dende $XVal = 0$ ata $XVal = n$.

Na representación gráfica omítense os rectángulos de altura imperceptible.

$B(10,0.1)$	$B(10,0.5)$	$B(10.0.7)$
		

Xeneralizando, pode dicirse que o histograma dunha distribución binomial $B(n,p)$ aumenta a súa altura a medida que k se aproxima á media $\mu = np$ e diminúe a medida que k se aparta de μ.

Ademais, das gráficas anteriores obsérvase que:

- Para $p = 0.5$ o histograma é simétrico respecto a media μ, como se ve na figura superior central.
- Para $p < 0.5$ o histograma móvese cara a esquerda, como se ve na figura superior esquerda.
- Para $p > 0.5$ o histograma móvese cara a dereita, como se ve na figura superior dereita.

285. Compara o histograma da distribución de probabilidade binomial $B(20,0.7)$ e a distribución $N\left(14,\sqrt{4.2}\right)$.

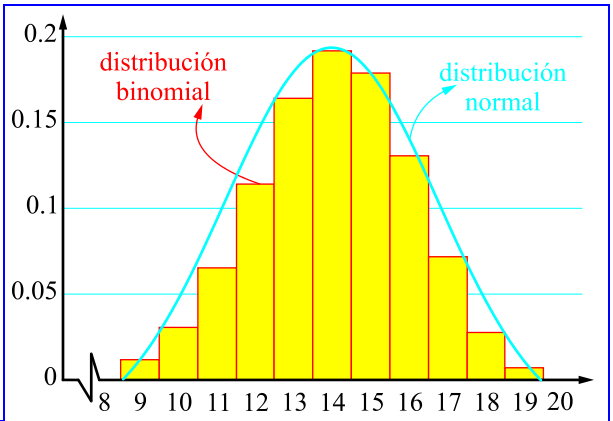
Solución:

Consideremos agora a representación gráfica da distribución para $B(20,0.7)$ adxunta.

Aínda que $p \neq 0.5$ obsérvase que, para $8 \le k \le 20$, o histograma é case simétrico sobre a media $\mu = n \cdot p = 20 \cdot 0.7 = 14$. Para k fora dese intervalo $p(k)$ é practicamente 0.

Á desviación típica para $B(20,0.7)$ é $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{20 \cdot 0.7 \cdot 0.3} =$ $= \sqrt{4.2} \approx 2$, e de aí obtense que

$$[8,20] = [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$$



Histograma de $B(20,0.7)$

Distribución de $N\left(14,\sqrt{4.2}\right)$

Estes resultados son típicos das distribucións binomiais $B(n,p)$ nas que $np \ge 5$ e $nq \ge 5$.

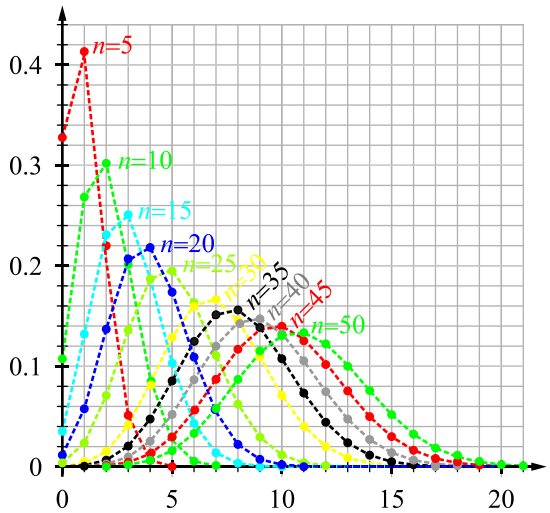
286. Fai as representacións gráficas das binomiais $B(n,0.2)$ para os valores $n=5$, $n=10$, $n=15$, $n=20$, $n=25$, $n=30$, $n=35$, $n=40$, $n=45$ e $n=50$, e indica a quen se vai aproximando.

Solución:

Á dereita vense as representacións gráficas pedidas.

Para facilitar a interpretación, na representación gráfica unimos os puntos mediante unha alínea descontinua.

Vese claro que cando n vai aumentando a alínea que une os puntos vaise aproximando á representación gráfica dunha normal.



5.4.2. Propiedade básica do histograma de probabilidade da distribución binomial

Formalizando os resultados dos anteriores exemplos 284, 285 e 286 tense:

Teorema 1. Sexa unha distribución de probabilidade binomial $B(n,p)$.

Para $np > 5$ e $nq > 5$, o histograma de probabilidade de $B(n,p)$ é case simétrico con respecto á media $\mu = np$ sobre o intervalo $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$, onde $\sigma = \sqrt{npq}$ e fora dese intervalo $p(k) \cong 0$.

5.4.3. Aproximación normal. Teorema central do límite 1

Na figura do exemplo 285 anterior, a curva de densidade para a distribución normal $N\left(14,\sqrt{4.2}\right)$ superponse ao histograma de probabilidade da distribución binomial $B(20,0.7)$. Nese problema tíñase que $\mu=14$ e $\sigma=\sqrt{4.2}$ para ambas distribucións.

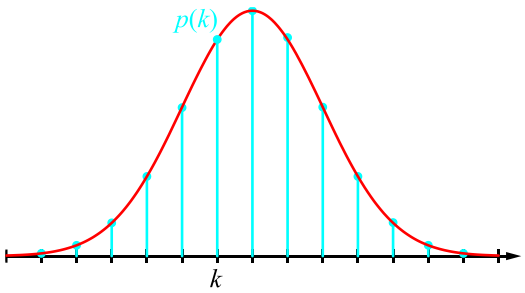
O problema que se tratamos agora é o de *calcular a probabilidade nunha binomial mediante unha aproximación dese valor obtido mediante o uso dunha normal*, dado que para as distribucións normais facemos os cálculos con facilidade e para as normais, cando n é grande, o traballo resulta moi laborioso.

Fagamos unha aproximación ao problema:

Sexan as variables: • X : $B(n,p)$, con $\mu=np$ e $\sigma=\sqrt{npq}$. • X' : $N\left(np,\sqrt{npq}\right)$.	$B(n,p)$ é discreta e $N\left(np,\sqrt{npq}\right)$ é continua. Como podemos aproximar os seus valores?

Do teorema 1 tense que para $np>5$ e $nq>5$ as dúas distribucións son *case idénticas*, coa salvidade de que X é discreta (toma valores en 0, 1, 2, …, k, …, n) mentres que a distribución X' é continua.

Na imaxe adxunta está a representación gráfica de X : $B(n,p)$, para 0, 1, 2, …, k, …, n e superposta a de X' : $N\left(np,\sqrt{npq}\right)$.



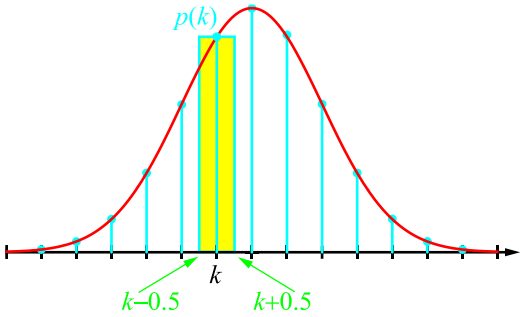
Representando X : $B(n,p)$, para cada k tense a súa imaxe $p(k)$, e marcamos o punto que o representa.

O valor de $p(k)$, *sen unidades*, é igual ao da área dun rectángulo de base 1, centrado en k, e altura $p(k)$:

$$k\to[k-0.5,k+0.5]\ \to\ p(k)=1\cdot p(k)$$

Así, a cada un dos valores puntuais: 0, 1, 2, …, k, …, n, de X asóciaselle un intervalo unidade centrado no punto correspondente:

$$k\to[k-0.5,k+0.5]\to\ p(k)=1\cdot p(k)$$



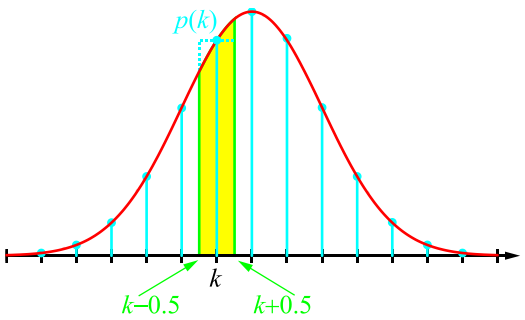
Así están "igualados" os valores *puntuais* dunha variable discreta $p(k)$ a unhas *áreas*.

Dado que case son idénticas as representacións gráficas, a área da superficie remarcada

$$p(k-0.5<X'<k+0.5)$$

é practicamente igual á área do rectángulo de base 1: $[k-0.5,k+0.5]$ e altura $p(k)$.

$$p(X=k)=p(k)=1\cdot p(k)\approx$$
$$\approx p(k-0.5<X'<k+0.5)$$



$$\underbrace{p(X=k)}_{B(n,p)}\approx\underbrace{p(k-0.5<X'<k+0.5)}_{N\left(np,\sqrt{npq}\right)}$$

Resumindo: para calquera valor enteiro k entre $\mu-3\sigma$ e $\mu+3\sigma$, a área baixo a curva normal entre $k-0.5$ e $k+0.5$ é aproximadamente igual a $p(k)$ ≡ área do rectángulo de base 1 e altura $p(k)$. Esta aproximación dise que está feita utilizando a *corrección de continuidade*.

A probabilidade da binomial $p(k)$ para $B(n,p)$ pode aproximarse pola probabilidade da normal $p(k-0.5 \le X \le k+0.5)$ para $N\left(np,\sqrt{npq}\right)$, e axustarase ben sempre que $n>30$, $np \ge 5$ cando $p \le 0.5$ ou $nq \ge 5$ cando $p>0.5$.

Unha xustificación teórica para a aproximación de $B(n,p)$ por $N\left(np,\sqrt{npq}\right)$ é o Teorema Central do Límite que se expón a continuación:

Teorema 2: Teorema Central do Límite.
Sexan X_1, X_2, X_3 … unha sucesión de variables aleatorias independentes e identicamente distribuídas, con media μ e desviación típica σ. Sexan:

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \quad \text{e} \quad Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Entón, para n grande e para calquera intervalo $\{a \le x \le b\}$ verifícase que

$$p(a \le Z_n \le b) \approx p(a \le \Phi \le b)$$

onde Φ é a distribución normal tipificada.

Lembremos que $\overline{X}_n$ é a media mostral das variables aleatorias X_1, X_2, X_3 …, X_n. Así no teorema anterior Z_n é a media mostral tipificada.

En linguaxe da "*andar pola casa*", o Teorema Central do Límite dinos que para calquera sucesión de experimentos repetidos, a distribución da media mostral tipificada aproxímase, a medida que aumenta o número de experimentos, á distribución normal tipificada.

No que segue deixarase de utilizar a distinción de notación entre X: binomial e X': normal usando X para ambos casos, por ser máis cómodo.

5.4.4. Cálculos usando a aproximación normal

Sexa pB a probabilidade da binomial para $B(n,p)$ e sexa pN a probabilidade da normal para $N\left(np,\sqrt{npq}\right)$ onde $np \ge 5$ e $nq \ge q$. Do teorema 2 tense:

$$pB(k) \approx pN(k-0.5 \le X \le k+0.5)$$

Para a distribución $B(n,p)$ a variable binomial $k \in [0,n]$, e polo tanto debería reemprazarse $pB(k \le n_1)$ por $pB(0 \le k \le n_1)$ e $pB(k \ge n_1)$ por $pB(n_1 \le k \le n)$ e así tense que:

- $pB(0 \le k \le n_1) \approx pN(-0.5 \le X \le n_1+0.5) = pN(X \le n_1+0.5) - pN(X \le -0.5)$.
- $pB(n_1 \le k \le n) \approx pN(n_1-0.5 \le X \le n+0.5) = pN(X \ge n_1-0.5) - pN(X \ge n+0.5)$.

Como $pN(X \le -0.5) \approx 0$ e $pN(X \ge n+0.5) \approx 0$ son moi pequenos, case cero, poden aceptarse as aproximacións laterais $pB(k \le n_1) \approx pN(X \le n_1+0.5)$ e $pB(k \ge n_1) \approx pN(X \ge n_1+0.5)$.

Segundo isto, para os enteiros non negativos n_1 e n_2, tense:

Para a binomial $B(n,p)$ e a normal $N\left(np,\sqrt{npq}\right)$, con $n>30$, $np \ge 5$ cando $p \le 0.5$ ou $nq \ge 5$ cando $p>0.5$, e considerando as súas probabilidades, PB e PN tense:

- $pB(k) \approx pN(k-0.5 \le X \le k+0.5)$
- $pB(n_1 \le k \le n_2) \approx pN(n_1-0.5 \le X \le n_2+0.5)$.
- $pB(k \le n_1) \approx pN(X \le n_1+0.5)$.
- $pB(k \ge n_1) \approx pN(X \ge n_1+0.5)$.

287. Tírase unha moeda 100 veces. Obtén a probabilidade P de que saia cara:

287.1. exactamente 60 veces.

287.2. entre 48 e 53 veces inclusive.

287.3. menos de 45 veces.

Solución:

É un experimento binomial $B(n,p)$, con $n=100$, $p=0.5$ e $q=1-p=0.5$. Obtense μ e σ:

- $\mu = np = 100\cdot 0.5 = 50$.
- $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100\cdot 0.5\cdot 0.5} = \sqrt{25} = 5$.

Podemos usar a distribución normal para aproximar as probabilidades binomiais pedidas, xa que $n>30$, $np = 100\cdot 0.5 = 50 > 5$ e $nq = 100\cdot 0.5 = 50 > 5$.

287.1. Segundo o resultado anterior:

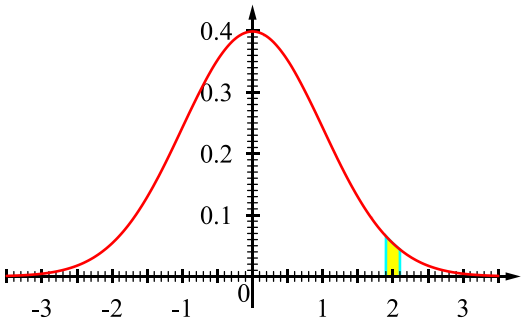
$$pB(60) \approx pN(60-0.5 \le X \le 60+0.5) = pN(59.5 \le X \le 60.5)$$

Transformamos $a=59.5$ e $b=60.5$ en unidades tipificadas:

$$Z_1 = \frac{59.5-50}{5} = 1.9\ ,\ Z_2 = \frac{60.5-50}{5} = 2.1.$$

Aquí $0 < Z_1 < Z_2$, e polo tanto:

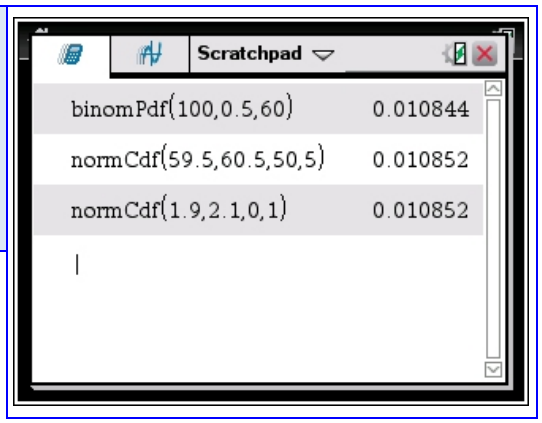
$$P = pB(60) \approx pN(59.5 \le X \le 60.5) = pN(1.9 \le Z \le 2.1) =$$
$$= p(Z \le 2.1) - p(Z \le 1.9) = \Phi(2.1) - \Phi(1.9) = 0.9821 - 0.9713 =$$
$$= 0.0108.$$



Nota. Este resultado coincide co valor exacto de $pB(60)$ con catro decimais.

É dicir, con catro decimais: $pB(60) = \binom{100}{60}\cdot 0.5^{60}\cdot 0.5^{40} = 0.0108438667$

Comprobamos os cálculos coa calculadora, para ver a precisión e exactitude do que se fixo manualmente.



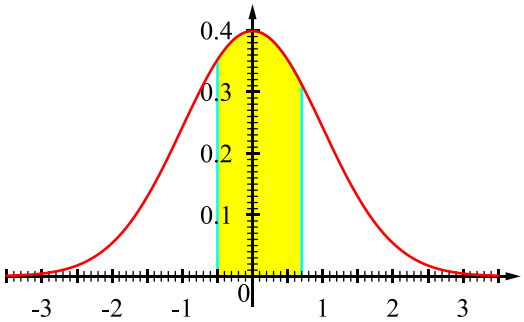
287.2. Buscamos $pB(48 \le k \le 53)$ ou, asumindo que os datos son continuos, $pN(48-0.5 \le X \le 53+0.5) = pN(47.5 \le X \le 53.5)$.

Transformamos $a=47.5$ e $b=53.5$ en unidades tipificadas, o que nos da:

$$Z_1 = \frac{47.5-50}{5} = -0.5\ ,\ Z_2 = \frac{53.5-50}{5} = 0.7.$$

Aquí, $Z_1 < 0 < Z_2$. De acordo con isto, $P = pB(48 \le k \le 53) \approx$

$$\approx pN(47.5 \le X \le 53.5) = pN(-0.5 \le Z \le 0.7) =$$
$$= p(Z \le 0.7) - p(Z \le -0.5) = p(Z \le 0.7) - p(Z \ge 0.5) =$$
$$= p(Z \le 0.7) - (1 - p(Z \le 0.5)) = p(Z \le 0.7) - 1 + p(Z \le 0.5) =$$
$$= \Phi(0.7) - 1 + \Phi(0.5) = 0.7580 - 1 + 0.6915 = 0.4495.$$

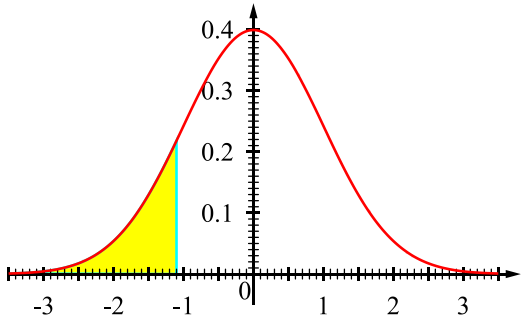


287.3. Buscamos, $pB(k<45) = pB(k \le 44)$ e, aproximadamente, este valor ven sendo $pN(X \le 44.5)$.

Tipificando $a=44.5$ obtense que $Z_1 = \frac{44.5-50}{5} = -1.1$.

Aquí $Z_1 < 0$, e entón tense que: $P = pB(k \le 44) \approx pN(X \le 44.5) =$

$$= pN(Z_1 \le -1.1) = pN(Z_1 \ge 1.1) = 1 - pN(Z \le 1.1) = 1 - \Phi(1.1) =$$
$$= 1 - 0.8643 = 0.1357.$$



288. Tírase unha moeda 12 veces. Calcula a probabilidade de que o número de caras que saen estea entre 4 e 7, ambos inclusive usando:

288.1. A distribución binomial.

288.2. A aproximación normal á distribución binomial.

288.3. Calcula a porcentaxe de erro relativo que se comete.

Solución:

288.1. Sacar cara indicará ter éxito. Temos que $n=12$, $p=\frac{1}{2}$ é a probabilidade de que saia cara ao lanzar unha moeda, e

$q=1-p=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

A probabilidade de ter k éxitos para unha distribución binomial é $p(k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$, que neste caso se traduce a

$pB(k)=\binom{12}{k}\cdot 0.5^k\cdot 0.5^{12-k}$.

$pB(4)=\binom{12}{4}\cdot 0.5^4\cdot 0.5^8=\frac{495}{4096}$; $pB(5)=\binom{12}{5}\cdot 0.5^5\cdot 0.5^7=\frac{792}{4096}=\frac{99}{512}$; $pB(6)=\binom{12}{6}\cdot 0.5^6\cdot 0.5^6=\frac{924}{4096}=\frac{231}{1024}$,

$pB(7)=\binom{12}{7}\cdot 0.5^7\cdot 0.5^5=\frac{792}{4096}=\frac{99}{512}$.

A probabilidade pedida é:

$P=\frac{495}{4096}+\frac{792}{4096}+\frac{924}{4096}+\frac{792}{4096}=\frac{3003}{4096}\approx 0.7332$.

288.2. Aquí $\mu=np=12\cdot 0.5=6$ e $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{12\cdot 0.5\cdot 0.5}=\sqrt{3}\approx 1.732$ (non verifica $n>30$).

Sexa X o número de caras que saen. Temos que calcular $pB(4\le X\le 7)$, e asumindo que os datos son continuos, para poder aplicar a aproximación binomial, temos que atopar $pN(3.5\le X\le 7.5)$.

Tipificamos estes valores:

$Z_1=\frac{3.5-6}{1.732}\approx -1.44$ e $Z_2=\frac{7.5-6}{1.732}\approx 0.87$. Entón:

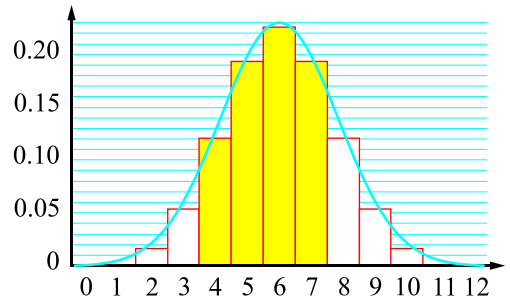
$P=pN(3.5\le X\le 7.5)=pN(-1.44\le Z\le 0.87)=pN(Z\le 0.87)-pN(Z\le -1.44)=$

$=pN(Z\le 0.87)-pN(Z\ge 1.44)=pN(Z\le 0.87)-(1-pN(Z\le 1.44))==pN(Z\le 0.87)-1+pN(Z\le 1.44)$

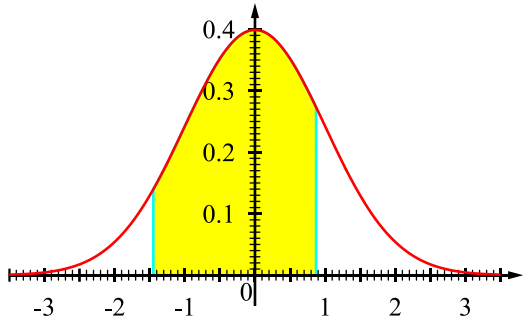
$=\Phi(0.87)-1+\Phi(1.44)=0.8078-1+0.9521==0.7329$.

288.3. A porcentaxe de erro relativo que se comete é:

$\frac{0.7332-0.7329}{0.7332}\cdot 100\approx 0.04\%$.



$pB(4\le X\le 7)$



$pN(-1.44\le Z\le 0.87)$

289. Tírase un dado 180 veces. Determina a probabilidade de que saia o 6:

289.1. entre 29 e 32 veces, ambos inclusive.

289.2. entre 31 e 35 veces, ambos inclusive.

289.3. menos de 22 veces.

Solución:

É un experimento binomial $B(n,p)$, con $n=180$ e $p=\frac{1}{6}$ e $q=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$. Entón:

$\mu=np=180\cdot\frac{1}{6}=30$, $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{180\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}=\sqrt{25}=5$.

Sexa X : «o número de veces que sae 6» e P a probabilidade pedida en cada caso.

289.1. Buscamos $pB(29\le X\le 32)$ ou, asumindo que os datos son continuos, $pN(28.5\le X\le 32.5)$. Tipificando a normal temos:

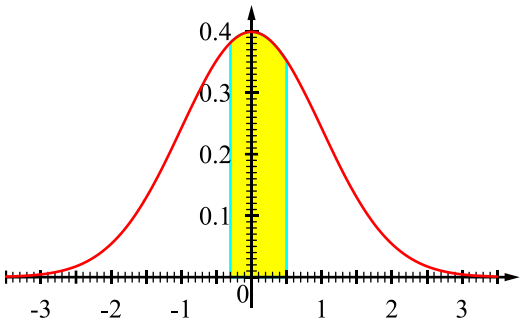
$28.5\to Z_1=\frac{28.5-30}{5}=-0.3$ e $32.5\to Z_2=\frac{32.5-30}{5}=0.5$.

Tense que $Z_1\le 0\le Z_2\to P=pN(28.5\le X\le 32.5)=$

$=pN(-0.3\le Z\le 0.5)=p(Z\le 0.5)-p(Z\le -0.3)=$

$=p(Z\le 0.5)-p(Z\ge 0.3)=p(Z\le 0.5)-(1-p(Z\le 0.3))=$

$=\Phi(0.5)-1+\Phi(0.3)=0.6915-1+0.6179=0.3094$.



289.2. Pídese $pB(31\le X\le 35)$ ou, asumindo que os datos son continuos, $pN(30.5\le X\le 35.5)$.

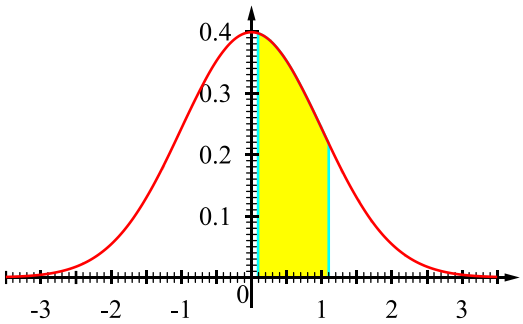
Tipificando tense: $30.5\to Z_1=\frac{30.5-30}{5}=0.1$ e

$35.5\to Z_3=\frac{35.5-30}{5}=1.1$.

Tense que $0\le Z_1\le Z_2\to P=pN(30.5\le X\le 35.5)=$

$=pN(0.1\le Z\le 1.1)=pN(Z\le 1.1)-pN(Z\le 0.1)=$

$=\Phi(1.1)-\Phi(0.1)=0.8643-0.5398=0.4041$.

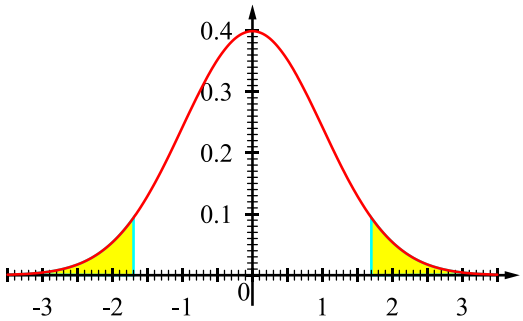


289.3. Búscase $pB(X<22)$ ou, aproximadamente, $pN(X\le 21.5)$ (mira o resumo das aproximacións da binomial mediante unha normal na páxina 123).

Tipificando tense:

$21.5\to Z=\frac{21.5-30}{5}=-1.7\to P=pN(X\le 21.5)=pN(Z\le -1.7)=$

$=pN(Z\ge 1.7)=1-pN(Z\le 1.7)=1-0.9554=0.0446\,1$.



290. Asúmese que o 4% da poboación maior de 65 anos ten a enfermidade de Alzheimer. Supoñamos que se toma unha mostra aleatoria de 9600 persoas maiores de 65 anos. Calcula a probabilidade P de que menos de 400 delas teñan a enfermidade.

Solución:

Trátase dunha distribución binomial $B(n,p)$ co $n=9600$ e $p=0.04$ e $q=1-p=0.96$.

Entón $\mu=np=9600\cdot 0.04=384$ e $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{9600\cdot 0.04\cdot 0.96}=\sqrt{368.64}=19.2$.

Sexa X o «número de persoas que padecen a enfermidade de Alzheimer».

Búscase a probabilidade $pB(X<400)$ ou, aproximadamente, $pN(X\le 399.5)$ (mira o resumo das aproximacións da binomial mediante unha normal na páxina 123).

Tipificando este valor tense:

$399.5\to Z=\frac{399.5-384}{19.2}\approx 0.81\to P=pN(X\le 395.5)=pN(Z\le 0.81)=0.7910$.