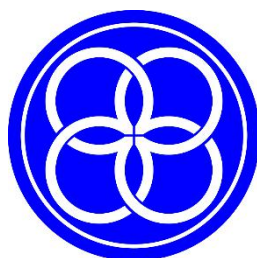


PRÁCTICAS PARA RESOLVER PROBLEMAS (CON ACTIVIDADES DE NIVELACIÓN)

José Ricardo López Saavedra

IES AS MARIÑAS



2020

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CC.SS. I
TEMA 2. ARITMÉTICA MERCANTIL (02)

2020

USO DE CALCULADORAS GRÁFICAS E PROGRAMAS DE COMPUTADOR

Dentro dos estándares de aprendizaxe requeridos para a ESO e o Bacharelato está o uso de medios tecnolóxicos para a realización de cálculos numéricos, alxébricos ou estatísticos, para facer representacións gráficas, recrear ámbitos e obxectos xeométricos, para tratar datos, extraer información, ... e elaborar documentos dixitais coas ferramentas adecuadas como resultado do proceso de procura, análise e selección da información relevante. Entre os contidos contéplase o uso de calculadoras gráficas e programas de computador.

Atendendo ao anterior, no departamento de matemáticas do IES As Mariñas imos usar as calculadoras gráficas da marca Texas Instruments seguintes: TI-89, TI-89 Titanium, Voyage 200 e TI-nspire CAS/ TI-nspire CX CAS polos seguintes motivos:

- Son calculadoras con un sistema alxébrico computacional ou Sistema de Álgebra Computacional SAC (CAS, do inglés Computer Algebra System) e facilitan o cálculo simbólico.
- Teñen un prezo asequible.
- Pesan e consumen pouco, polo que poden transportarse facilmente, e usarse en calquera entorno.
- Son útiles para o ensino universitario, dado que polas súas características poden usarse no estudo de carreiras técnicas: enxeñerías, arquitectura, matemáticas, ... como do ámbito das ciencias sociais: económicas, empresariais, ...; tamén se poden utilizar para o estudo de FP.
- Dispoñen de emuladores gratuítos, e pode tamén descargarse gratuitamente o sistema operativo (ROM) das calculadoras da páxina web oficial de TI, polo que, de dispoñer de ordenador pode traballarse con estas calculadoras baixo un emulador, tanto no entorno Windows como Android.
- Son programabeis, polo que poden adaptarse ás necesidades particulares de cada alumno.
- Existen miles de programas gratuítos para estas máquinas, que van dende xogos ata aplicacións específicas para enxeñería.
- Existen programas comerciais para estas máquinas, que aumentan a súa potencialidade.

Datos do software para ordenador e para calculadoras utilizado

<https://education.ti.com/en/us/downloads-and-activities?active=software>

- Dende esta páxina —páxina oficial de Texas Instruments— poden descargarse gratuitamente os sistemas operativos para esas calculadora, programas, aplicacións flash, manuais de usuario das calculadoras, do software, ...

<https://play.google.com/store/apps/details?id=com.Bisha.TI89EmuDonation>

<https://play.google.com/store/apps/details?id=com.Bisha.TI89Emu>

- Acceso ao emulador de diversas calculadoras para os dispositivos Android. Hai que descargar a ROM dende a páxina:
<https://education.ti.com/en/us/downloads-and-activities?active=software>

<http://www.ticalc.org/>

- Dende esta páxina poden descargarse miles de programas e utilidades para as calculadoras citadas: emuladores, utilidades para windows, programas de aplicación, xogos, ...

<http://www.dessci.com/en/products/mathtype/>

- Páxina oficial dun editor de ecuacións que corre sobre o Word de Microsoft.

<http://www.corel.com/>

- Páxina oficial de editores gráficos en formato vectorial, de mapas de puntos e técnicos.

<http://www.microsoft.com/es-es>

<https://www.microsoft.com/es-es/download/details.aspx?id=15702> (Microsoft Mathematics)

<http://www.microsoft.com/es-es/download/details.aspx?id=36777> (Complemento Microsoft Mathematics 2013 para Word)

- Páxina oficial onde se pode obter o paquete Office (Word, Excel, ...), Windows, Microsoft Mathematics, Vissio, ...

<http://www.geogebra.org/>

- Páxina oficial de onde se pode descargar gratuitamente o GeoGebra, manuais do e aplicacións. É un software matemático que posúe funcionalidades que exceden do concepto de procesador xeométrico.

<https://www.desmos.com/>

- Páxina onde se pode acceder gratuitamente ao programa Desmos que permite, en local ou na web, a realización de gráficas muy e a análise das mesmas.

Recoñecemento de marcas rexistradas: as marcas aquí citadas, comerciais ou non, son marcas dos seus propietarios respectivos, e aquí son citadas co único fin de divulgación docente.



TÁBOA DE CONTIDOS

Repaso de proporcionalidade e porcentaxes	5
1. Proporcionalidade	5
1.1. Razóns	5
1.2. Proporcións	5
1.3. Proporcionalidade directa	6
1.4. Proporcionalidade inversa	6
1.5. Proporcionalidade composta	6
2. Regra de tres	6
2.1. Tipos de regra de tres	6
2.2. Redución á unidade	10
2.3. Repartos proporcionais	10
2.4. Falsa posición	14
3. Porcentaxes: tantos por cento e por mil.....	14
3.1. Tipos básicos de problemas de porcentaxes	15
3.2. Porcentaxes para época de eleccións	30
4. Uso de calculadoras e software matemático	34
Aritmética mercantil	35
1. O valor temporal do diñeiro.....	35
1.1. O custo da oportunidade	35
1.2. A función do xuro	35
1.3. Xuro simple e xuro composto	35
1.4. Capitalización e desconto	36
2. Valor final dun capital único	37
2.1. Pago anual de xuros	37
2.2. Pago mensual de xuros.....	39
2.3. Pago diario de xuros	39
3. TAE: Taxa Anual Equivalente	41
4. Amortización de préstamos.....	42
5. Repaso de Progresións xeométricas	45
5.1. Sucesións	45
5.2. Progresións xeométricas	46
6. Cálculos para amortización de débedas ou acumulación de capitais.....	51
6.1. Amortización dunha débeda mediante pagos periódicos iguais (amortización)	51
6.2. Obtención da fórmula da cantidade periódica para amortizar un préstamo.....	52
6.3. Amortización dun creto, con xuro variable	55
6.4. Creación dun capital mediante pagos periódicos iguais (capitalización)	58
6.5. Fórmulas para as anualidades de capitalización	59
Cuestións, exercicios e problemas	67



REPASO DE PROPORCIONALIDADE E PORCENTAXES

1. PROPORCIONALIDADE

A proporcionalidade é unha relación entre magnitudes medibles. É un dos escasos conceptos matemáticos amplamente difundido na poboación. Isto débese a que é en boa medida intuitiva e de uso moi común. O factor constante de proporcionalidade pode utilizarse para expresar a relación entre cantidades.

1.1. Razóns

Chámase *razón* de dous números da mesma especie ao cociente que resulta de dividir un deles polo outro.

- Ao primeiro dos números chámase *antecedente* e ao segundo chámase *consecuente*.

1. Por exemplo, a razón de 10 a 5 é $\frac{10}{5} = 2$; 10 é o antecedente, 5 é o consecuente e 2 a razón.

1.2. Proporcións

Chámase *proporción* á igualdade de dúas razóns. É dicir:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

é unha proporción.

2. Por exemplo, $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ é unha proporción.

- Os elementos a e d reciben o nome de *extremos* e os elementos b e c reciben o nome de *medios*. Esta proporción tamén se escribe:

$$a : b :: c : d$$

- Outras veces emprégase unha forma *mixta*:

$$a : b = c : d \text{ e } a \div b = c \div d$$

e exprésase usualmente « a é a b como c é a d »

Teorema 1. En toda proporción o produto dos medios é igual ao produto dos extremos. É dicir:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ proporción } \leftrightarrow ad = bc$$

3. Por exemplo $\frac{2}{3} = \frac{8}{12} \leftrightarrow 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8$.

Teorema 2. Se se permutan entre si os medios ou os extremos dunha proporción, obtense sempre outra que tamén é certa. É dicir:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

4. Exemplos son : $\frac{2}{3} = \frac{8}{12} \rightarrow \frac{12}{3} = \frac{8}{2}$, e $\frac{2}{3} = \frac{8}{12} \rightarrow \frac{2}{8} = \frac{3}{12}$.

Teorema 3. Se varias razóns son iguais entre si, a suma alxébrica de calquera numeradores dividida pola suma efectuada cos denominadores correspondentes, forman unha razón igual a cada unha das dadas. É dicir:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{d}{d_1} = \dots \rightarrow \frac{a+b-d}{a_1+b_1-d_1} = \frac{a}{a_1}, \text{ por exemplo.}$$

5. Por exemplo: $\frac{2}{3} = \frac{8}{12} \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2+8}{3+12} \rightarrow \frac{2}{3} = \frac{10}{15}$.



Teorema 4. Se dúas razóns son iguais, tamén o son as razóns que se obteñen dividindo a suma dos termos de cada unha pola súa diferenza. É dicir:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

- Unha proporción dise *discreta* cando tódolos elementos son distintos. Neste caso cada elemento recibe o nome de *cuarto proporcional*.

- Unha proporción é *continua* cando os termos opostos son iguais. É dicir:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

- No caso dunha proporción continua, os elementos iguais reciben o nome de *medio proporcional* con respecto ós outros dous desiguais, e cada un dos desiguais recibe o nome de *terceiro proporcional*.

1.3. Proporcionalidade directa

- ✍ Dise que dúas cantidades son *directamente proporcionais* cando a multiplicación (ou división) dunha delas por un número determinado implica que a outra quede automaticamente multiplicada (ou dividida) por ese mesmo número.

6. Por exemplo: se 10 libros custan 200 € → 20 libros custan 400 €.

1.4. Proporcionalidade inversa

- ✍ Dise que dúas cantidades son *inversamente proporcionais* cando a multiplicación (ou división) dunha delas por un número determinado implica que a outra queda automaticamente dividida (multiplicada) por ese mesmo número.

7. Por exemplo: se 4 persoas teñen comida almacenada para 10 días → a mesma cantidade de comida almacenada para 8 persoas durará para 5 días.

1.5. Proporcionalidade composta

- ✍ Temos *proporcionalidade composta* cando a variabilidade dunha magnitude non depende exclusivamente das variacións simultáneas de outra coa que se relaciona directa ou inversamente nos seus valores. Neste caso, varios elementos distintos interveñen á vez na proporcionalidade para modificala de diversos xeitos; neste caso a magnitude proposta é proporcional ás demais consideradas illadamente, formando cos dous valores correspondentes a cada unha proporcións directas ou inversas.

- Cando unha magnitude é directamente proporcional a outras varias, tamén o é co produto delas.
- Cando unha magnitude é inversamente proporcional a outras varias, tamén o é co produto delas.

8. Por exemplo: 4 persoas traballando 8 horas diarias fan un traballo en 5 días → 2 persoas traballando 10 horas diarias fan o mesmo traballo en 8 días.

2. REGRA DE TRES

- ✍ A *regra de tres* é unha operación que ten por obxecto achar o cuarto termo dunha proporción cando se coñecen os outros tres.

- A regra de tres emprega dous tipos de números, o *suposto* e a *pregunta*. Os números que compoñen o suposto son coñecidos mentres que na pregunta hai un descoñecido.

2.1. Tipos de regra de tres

Existen tres tipos básicos de regra de tres:

2.1.1. Regra de tres directa

- ✍ *Regra de tres directa*, cando as cantidades que interveñen no problema son directamente proporcionais.

9. Se 10 libros custan 200 €, canto custarán 12 libros?

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 10 \rightarrow 200 \\ 12 \rightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow \frac{200}{x} = \frac{10}{12} \rightarrow x = \frac{12 \cdot 200}{10} = 240 \text{ €}.$$

Solución: 12 libros custan 240 €.



10. Sabendo que un tubo de 16 m de lonxitude pesa 240 kg, determina a lonxitude que terá outro tubo da mesma sección e 600 kg de peso.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 16 \text{ m} \rightarrow 240 \text{ kg} \\ x \text{ m} \rightarrow 600 \text{ kg} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{16}{x} = \frac{240}{600} \rightarrow x = \frac{600 \cdot 16}{240} = 40 \text{ metros.}$$

Solución: o outro tubo medirá 40 metros.

11. O vernizado dun piso de 117 m² custou 1563.80 €. Calcula o que custará vernizar outro piso de 220 m².

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 117 \text{ m}^2 \rightarrow 1563.80 \text{ €} \\ 220 \text{ m}^2 \rightarrow x \text{ €} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{1563.80}{x} = \frac{117}{220} \rightarrow x = \frac{220 \cdot 1563.80}{117} = 2940.4786 \approx 2940.48 \text{ €}.$$

Solución: o vernizado do outro piso custará aproximadamente 2940.48 €.

12. Considerando que o custo da realización dun libro é directamente proporcional ao número de páxinas, calcula o custo dun libro de 134 páxinas, sabendo que o doutro de 417 páxinas foi de 23750 €

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 417 \text{ páxinas} \rightarrow 23750 \text{ €} \\ 134 \text{ páxinas} \rightarrow x \text{ €} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{23750}{x} = \frac{417}{134} \rightarrow x = \frac{134 \cdot 23750}{417} = 7631.89448 \text{ €}$$

Solución: a realización do libro de 134 páxinas custará 7631.89448 €.

13. Nun comercio mercáronse laranxas, plátanos e cirolas. Se o peso das laranxas supón o 27 % do total e o dos plátanos o 37 %, calcula o peso das cirolas, sabendo que a cantidade total adquirida foi de 25 kg.

Solución:

$$\begin{array}{l} \text{As cirolas pesan o } 100\% - (27\% + 37\%) = 36\%. \text{ En consecuencia, temos a proporción} \\ \left. \begin{array}{l} 100\% \rightarrow 25 \text{ kg} \\ 36\% \rightarrow x \text{ kg} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{25}{x} = \frac{100}{36} \rightarrow \\ \rightarrow x = \frac{36 \cdot 25}{100} = 9 \text{ kg.} \end{array}$$

Solución: mercáronse 9 kg de cirolas.

14. A roda dun vehículo da 320 voltas para recorrer 1 km. Cantas voltas dará para recorrer 150 m?

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 320 \text{ v} \rightarrow 1000 \text{ m} \\ x \text{ v} \rightarrow 150 \text{ m} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{320}{x} = \frac{1000}{150} \rightarrow x = \frac{150 \cdot 320}{1000} = 48 \text{ voltas.}$$

Solución: 48 voltas.

2.1.2. Regra de tres inversa



Regra de tres inversa, cando as cantidades que interveñen no problema son inversamente proporcionais.

15. Cunha velocidade de 70 quilómetros por hora faise un recorrido en 1 hora e 20 minutos. En canto tempo se fará o mesmo traxecto a 60 quilómetros por hora?

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 70 \rightarrow 80 \\ 60 \rightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow \frac{80}{x} = \frac{60}{70} \rightarrow x = \frac{70 \cdot 80}{60} = 93.\bar{3} \text{ minutos.}$$

Solución: tardaranse 93.³ minutos.

16. Un depósito ten cinco condutos de desaugue de igual diámetro. Abertos tres deles, baleirase o depósito en 5 horas e 20 minutos; abertos os cinco, en canto tempo se baleirá?

Solución:

Evidentemente tardarán menos tempo, polo que é unha proporción inversa:

$$\left. \begin{array}{l} 3 \text{ canos} \rightarrow 320 \text{ minutos} \\ 5 \text{ canos} \rightarrow x \text{ minutos} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{320}{x} = \frac{5}{3} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 320}{5} = 192 \text{ minutos.}$$

Solución: baleirarase en 192 minutos.



17. Un automóbil, circulando a velocidade constante, tarda 1 hora 50 minutos en recorrer os 138 km que separan Betanzos de Ribadeo. Circulando á mesma velocidade, calcula o tempo que tardará en recorrer os 25 quilómetros que separan Betanzos de A Coruña.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 138 \text{ km} \rightarrow 110 \text{ minutos} \\ 25 \text{ km} \rightarrow x \text{ minutos} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{110}{x} = \frac{138}{25} \rightarrow x = \frac{25 \cdot 110}{138} = 19.927 \approx 20 \text{ minutos.}$$

Solución: tardará aproximadamente 20 minutos.

18. Un gandeiro ten 640 ovellas e o pienso necesario para poder alimentalas durante 45 días. Cantas deberá vender se quere alimentar o rabaño durante 15 días máis, sen modificar a ración de cada animal?

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 640 \text{ ovellas} \rightarrow 45 \text{ días} \\ x \text{ ovellas} \rightarrow 60 \text{ días} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{60}{x} = \frac{60}{45} \rightarrow x = \frac{640 \cdot 45}{60} = 480 \rightarrow \text{ten pienso para 480 ovellas.}$$

Solución: debe vender $640 - 480 = 160$ ovellas.

19. Unha empresa de 2250 empregados ten provisións para 70 días. Ao acabar o día 29 collen as vacacións 200 empregados. Canto tempo durarán os provisións que quedan ao resto da plantilla?

Solución:

Despois de os 29 días, terán provisións para os 2250 empregados para $70 - 29 = 41$ días. Entón temos a proporción:

$$\left. \begin{array}{l} 2250 \text{ empregados} \rightarrow 41 \text{ días} \\ 2050 \text{ empregados} \rightarrow x \text{ días} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{41}{x} = \frac{2050}{2250} \rightarrow x = \frac{2250 \cdot 41}{2050} = 45 \text{ días.}$$

Solución: terán provisións para 45 días.

20. Unha roda, de 3 m de circunferencia, da 178 voltas para recorrer unha determinada distancia. Calcula o número de voltas que terá que dar a outra roda de 1.2 m de circunferencia, para recorrer a mesma distancia.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 3 \text{ m} \rightarrow 178 \text{ voltas} \\ 1.2 \text{ m} \rightarrow x \text{ voltas} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{178}{x} = \frac{1.2}{3} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 178}{1.2} = 445 \text{ voltas.}$$

Solución: a roda de 1.2 m de circunferencia dará 445 voltas.

2.1.3. Regra de tres composta

 *Regra de tres composta*, que se caracteriza por que contén termos representados por varios números de maneira que interveñen no problema varias cantidades de magnitudes diferentes, podendo ser cada un deles directa o inversamente proporcional.

21. Supoñamos que a magnitude A é directamente proporcional ás magnitudes B e C e inversamente proporcional ás magnitudes D e E. Sendo 3, 4, 8, 9 e 12 cantidades respectivamente correspondentes a A, B, C, D, E, obtén o valor x da magnitude A que corresponde a outro novo sistema de valores 2, 16, 3 e 4.

Solución:

Sexan	A	B	C	D	E
Cantidades correspondentes	3	4	8	9	12
	x	2	16	3	4

Formamos a proporción segundo sexan directas e inversas, obténdose que:

$$\frac{3}{x} = \frac{4}{2} \cdot \frac{8}{16} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{12} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 12}{4 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 4} = 27.$$

22. Cunha velocidade de 70 quilómetros por hora faise un recorrido en 1 hora e 20 minutos, ¿en canto tempo se fará un traxecto de dobre lonxitude a 60 quilómetros por hora?

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 70 \rightarrow 1 \rightarrow 80 \\ 60 \rightarrow 2 \rightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow \frac{80}{x} = \frac{60}{70} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{80 \cdot 70 \cdot 2}{60 \cdot 1} = 186.\hat{6} \text{ minutos.}$$

Solución: fará o traxecto en 186. $\hat{6}$ minutos.



23. En 30 días, un equipo de 22 homes pavimentaron 1600 m^2 de beirarrúa. Determina a superficie que pavimentará un equipo de 15 homes en 22 días.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 30 \text{ días} \rightarrow 22 \text{ h} \rightarrow 1600 \text{ m}^2 \\ 22 \text{ días} \rightarrow 15 \text{ h} \rightarrow x \text{ m}^2 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{1600}{x} = \frac{30}{22} \cdot \frac{22}{15} \rightarrow x = \frac{1600 \cdot 22 \cdot 15}{30 \cdot 22} = 800 \text{ m}^2.$$

Solución: pavimentará unha superficie de 800 metros cadrados.

24. Unha poboación de 24000 habitantes consume 360000 kg de pan en 30 días. Calcula durante cantos días se poderá alimentar unha cidade de 1000000 de habitantes con 1000 toneladas de pan.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 24000 \text{ habitantes} \rightarrow 360 \text{ t} \rightarrow 30 \text{ días} \\ 1000000 \text{ habitantes} \rightarrow 1000 \text{ t} \rightarrow x \text{ días} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{30}{x} = \frac{360}{1000} \cdot \frac{1000000}{24000} \rightarrow x = \frac{30 \cdot 1000 \cdot 24000}{360 \cdot 1000000} = 2 \text{ días.}$$

Solución: poderá alimentarse durante 2 días.

25. Os gastos de alimentación de 32 persoas supoñen 768 € diarios. Calcula cantos días poderán alimentarse, nas mesmas condicións, un colectivo de 101 persoas con 19392 €.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 32 \text{ personas} \rightarrow 768 \text{ €} \rightarrow 1 \text{ día} \\ 101 \text{ personas} \rightarrow 19392 \text{ €} \rightarrow x \text{ días} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{1}{x} = \frac{768}{19392} \cdot \frac{101}{32} \rightarrow x = 8 \text{ días.}$$

Solución: teñen fondos para alimentarse durante 8 días.

26. Un transportista cobrou 136000 € por trasladar, a 35 km de distancia, toda a grava producida nunha canteira durante os cinco días laborais dunha semana. Calcula o que custará transportar, a 200 km de distancia, a grava producida na canteira durante 30 días de traballo.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 136000 \text{ €} \rightarrow 35 \text{ km} \rightarrow 5 \text{ días} \\ x \text{ €} \rightarrow 200 \text{ km} \rightarrow 30 \text{ días} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{136000}{x} = \frac{35}{200} \cdot \frac{5}{30} \rightarrow x = \frac{136000 \cdot 200 \cdot 30}{35 \cdot 5} = 4662857.14 \text{ €.}$$

Solución: custará 4662857.14 €.

27. Considerando que unha familia composta por sete membros gasta 20 m^3 de auga en 8 días, calcula o gasto diario dunha poboación de 15000 habitantes.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 7 \text{ persoas} \rightarrow 20 \text{ m}^3 \rightarrow 8 \text{ días} \\ 15000 \text{ persoas} \rightarrow x \text{ m}^3 \rightarrow 1 \text{ día} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{20}{x} = \frac{7}{15000} \cdot \frac{8}{1} \rightarrow x = \frac{20 \cdot 15000 \cdot 1}{7 \cdot 8} = 5357.14 \text{ m}^3$$

Solución: a poboación gastará 5357.14 metros cúbicos de auga.

28. Para a construción dunha cerca de 84 m de lonxitude, 3 m de altura e 0.60 m de espesor fíxose un presuposto de 4384.80 €. Ao executar a obra, rebaixouse a altura nun metro; diminuíuse o espesor en 10 centímetros, e na lonxitude había un erro, por exceso, de 2 metros. Canto se abaratóu a obra?

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 84 \text{ m l} \rightarrow 3 \text{ m a} \rightarrow 0.6 \text{ m g} \rightarrow 4384.80 \text{ €} \\ 82 \text{ m l} \rightarrow 2 \text{ m a} \rightarrow 0.5 \text{ m g} \rightarrow x \text{ €} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{4384.80}{x} = \frac{84}{82} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{0.6}{0.5} \rightarrow x = \frac{4384.80 \cdot 0.5 \cdot 2 \cdot 82}{0.6 \cdot 3 \cdot 84} = 2378 \text{ €}$$

obra, cos datos actuais; en consecuencia, abarátouse a obra en $4384.80 - 2378 = 2006.80 \text{ €}$.

Solución: a obra abarátouse en 2006.80 €.

29. O custo da estancia nun cámping dun grupo de 5 persoas durante 8 días foi de 920 €. Cantas persoas constitúen outro grupo tal que unha estancia de 6 días no mesmo cámping lles custou 966 €?

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 5 \text{ personas} \rightarrow 8 \text{ días} \rightarrow 920 \text{ €} \\ x \text{ personas} \rightarrow 6 \text{ días} \rightarrow 966 \text{ €} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{5}{x} = \frac{6}{8} \cdot \frac{920}{966} \rightarrow x = 7 \text{ persoas.}$$

Solución: acampaban 7 persoas.



30. Se 36 obreiros traballando 6 horas diarias durante 40 días efectuaron un avance nun desmonte de 315 m de longo por 50 metros de ancho e 75 metros de profundidade, cantos obreiros serán necesarios para desmontar, en 24 días a 9 horas diarias, un desmonte de igual profundidade e de forma cadrada de 105 metros de lado?

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 36 \text{ obreros} \rightarrow 6 \text{ h/d} \rightarrow 40 \text{ días} \rightarrow 315 \text{ m l} \rightarrow 50 \text{ m a} \\ x \text{ obreros} \rightarrow 9 \text{ h/d} \rightarrow 24 \text{ días} \rightarrow 105 \text{ m l} \rightarrow 105 \text{ m a} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{36}{x} = \frac{9}{6} \cdot \frac{24}{40} \cdot \frac{315}{105} \cdot \frac{50}{105} \rightarrow x = 28 \text{ obreiros.}$$

Solución: a nova cadrilla deberá ser de 28 obreiros.

2.2. Redución á unidade

As regras de tres simple e composta poden resolverse polo método chamado *redución a unidade*. Este método necesita o coñecemento da proporcionalidade directa ou inversa das magnitudes, pero non esixe o plantexo das proporcións subseguintes, pero si a análise mental das condicións do problema e da dependencia mutua das magnitudes para determinar o valor descoñecido.

31. Se 12 traballadores necesitan 30 días de traballo para facer unha obra determinada, cantos días son necesarios para facer esa mesma obra se se empregan 8 obreiros?

Solución:

Se 12 obreiros necesitan 30 días, un obreiro tardará $12 \cdot 30$ días, e 8 obreiros necesitarán un tempo de $\frac{12 \cdot 30}{8} = 45$ días.

2.3. Repartos proporcionais

A regra de repartos proporcionais ten por obxecto indicar o procedemento apropiado para descompoñer unha cantidade concreta en partes proporcionais a varios números. Os repartos proporcionais poden ser:

2.3.1. Reparto proporcional simple



Reparto proporcional simple, e aquel no que o reparto é proporcional a unha única serie de números.

- Pode ser *directo* se as partes son directamente proporcionais ós números dados, ou *inverso*, cando as partes sexan inversamente proporcionais ós números propostos.
- O *reparto inversamente proporcional* a uns números propostos é equivalente ao reparto directamente proporcional con respecto ós inversos dos números propostos.

32. Reparte o número 100 en partes directamente proporcionais aos números 2 e 6.

Solución:

$$2 + 6 = 8;$$

$$\left. \begin{array}{l} 8 \rightarrow 100 \\ 6 \rightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow \frac{100}{x} = \frac{8}{6} \rightarrow x = \frac{6 \cdot 100}{8} = 75;$$

$$\left. \begin{array}{l} 8 \rightarrow 100 \\ 2 \rightarrow y \end{array} \right\} \rightarrow \frac{100}{y} = \frac{8}{2} \rightarrow y = \frac{2 \cdot 100}{8} = 25.$$

Solución: as partes pedidas son 25 (proporcional a 2) e 75 (proporcional a 6), respectivamente.

33. Reparte o número 100 en partes inversamente proporcionais aos números 2 e 6.

Solución:

Temos que facer o reparto en partes directamente proporcionais a $\frac{1}{2}$ e a $\frac{1}{6}$;

I. Dunha maneira clásica procederíamos así:

$$\text{mcm}(2,6) = 6; \quad \frac{1}{2} = \frac{3}{6}; \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{6};$$

xa co mesmo denominador sumar os numeradores: $3+1=4$, e facemos o reparto:

$$\left. \begin{array}{l} 4 \rightarrow 100 \\ 3 \rightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow \frac{100}{x} = \frac{4}{3} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 100}{4} = 75;$$

$$\left. \begin{array}{l} 4 \rightarrow 100 \\ 1 \rightarrow y \end{array} \right\} \rightarrow \frac{100}{y} = \frac{4}{1} \rightarrow y = \frac{100 \cdot 1}{4} = 25.$$

Solución: as partes son 75 e 25, respectivamente.



II. Facendo os cálculos con fraccións, tense:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3};$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{3} \rightarrow 100 \\ \frac{1}{2} \rightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow \frac{100}{x} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 100}{4} = 75;$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{3} \rightarrow 100 \\ \frac{1}{6} \rightarrow y \end{array} \right\} \rightarrow \frac{100}{y} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{6}} = 4 \rightarrow y = \frac{100}{4} = 25.$$

Solución: as partes son 75 e 25, respectivamente.

34. Tres técnicos contrataron a montaxe dunha central en 57120 €. O primeiro traballou 7 días, o segundo 9, e o terceiro 8. Os salarios como traballadores autónomos que perciben diariamente son 180 €, 150 € e 120 €, respectivamente. Deducidos os importes dos seus xornais, cal foi a ganancia extra que correspondeu a cada técnico nesa contrata?

Solución:

$7 \cdot 180 + 9 \cdot 150 + 8 \cdot 120 = 1260 + 1350 + 960 = 3570$. Sendo x , y e z o que lles corresponde a cada un e repartindo proporcionalmente 57120 € tense:

$$\left. \begin{array}{l} 3570 \rightarrow 57120 \\ 1260 \rightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{57120}{3570} \cdot 1260 = 20160 \text{ € cobrou primeiro};$$

$$\left. \begin{array}{l} 3570 \rightarrow 57120 \\ 1350 \rightarrow y \end{array} \right\} \rightarrow y = \frac{57120}{3570} \cdot 1350 = 21600 \text{ € cobrou o segundo};$$

$$\left. \begin{array}{l} 3570 \rightarrow 57120 \\ 960 \rightarrow z \end{array} \right\} \rightarrow z = \frac{57120}{3570} \cdot 960 = 15360 \text{ € cobrou o terceiro}.$$

Solución: a ganancia extra de cada técnico foi de a diferenza entre o que cobrou e o que gañaría ordinariamente, sendo de $20160 - 7 \cdot 180 = 18900$ € para o primeiro, $21600 - 9 \cdot 150 = 20250$ € para o segundo e de $15360 - 8 \cdot 120 = 14400$ € para o terceiro.

35. Catro persoas asociáronse para un negocio e contribuíron con igual cantidade. O primeiro retirou o seu capital aos 3 anos; o segundo aos 4 anos, e os outros dous cando rematou o negocio, que foi aos 6 anos. Se gañaron 95000000 €, deséxase saber o que correspondeu a cada un.

Solución:

O problema consiste nun reparto proporcional ós números 3, 4, 6 e 6 do total dos beneficios; $3 + 4 + 6 + 6 = 19$; en consecuencia:

$$\left. \begin{array}{l} 19 \rightarrow 95000000 \\ 3 \rightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{95000000}{19} \cdot 3 = 15000000 \text{ € gañou o primeiro};$$

$$\left. \begin{array}{l} 19 \rightarrow 95000000 \\ 4 \rightarrow y \end{array} \right\} \rightarrow y = \frac{95000000}{19} \cdot 4 = 20000000 \text{ € gañou o segundo};$$

$$\left. \begin{array}{l} 19 \rightarrow 95000000 \\ 6 \rightarrow z \end{array} \right\} \rightarrow z = \frac{95000000}{19} \cdot 6 = 30000000 \text{ € gañou o terceiro};$$

$$\left. \begin{array}{l} 19 \rightarrow 95000000 \\ 6 \rightarrow t \end{array} \right\} \rightarrow t = \frac{95000000}{19} \cdot 6 = 30000000 \text{ € gañou o cuarto}.$$

Solución: o primeiro gañou 15000000 €, o segundo 20000000 €, o terceiro gañou 30000000 € e o cuarto gañou 30000000 €.

36. Dous concellos colindantes desexan construír conxuntamente, e para común utilización, un pavillón deportivo que ten un presuposto de 480000 €. Ámbolos dous concellos conviron en que a aportación de cada un sexa directamente proporcional ao seu número de habitantes. Sabendo que as poboacións respectivas son 4500 e 12500 habitantes, calcular a canto ascende a aportación que ten que realizar cada concello.

Solución:

$4500 + 12500 = 17000$; sexa x o que debe aportar o concello de 4500 habitantes e y o que ten que aportar o outro:



$$\left. \begin{array}{l} 17000 \rightarrow 480000 \\ 4500 \rightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{4500 \cdot 480000}{17000} = 127058.823529 \text{ €}$$

$$\left. \begin{array}{l} 17000 \rightarrow 480000 \\ 12500 \rightarrow y \end{array} \right\} \rightarrow y = \frac{12500 \cdot 480000}{17000} = 352941.17647 \text{ €}.$$

Solución: o concello de 4500 habitantes debe aportar 127058.82€ e o de 12500 habitantes debe abonar 352941.18 €, respectivamente.

37. Unha empresa declarada en quebra deixou un activo de 13392000 €. Tiña tres acredores aos que debía 8500000, 10400000 e 9000000, respectivamente. Canto debe recibir cada un destes acredores?

Solución:

$8500000 + 10400000 + 9000000 = 27900000$. Sexan x , y , z o que deben percibir, respectivamente; entón temos as proporcións:

$$\left. \begin{array}{l} 27900000 \rightarrow 13392000 \\ 8500000 \rightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{8500000 \cdot 13392000}{27900000} = 4080000 \text{ €};$$

$$\left. \begin{array}{l} 27900000 \rightarrow 13392000 \\ 10400000 \rightarrow y \end{array} \right\} \rightarrow y = \frac{10400000 \cdot 13392000}{27900000} = 4992000 \text{ €};$$

$$\left. \begin{array}{l} 27900000 \rightarrow 13392000 \\ 9000000 \rightarrow z \end{array} \right\} \rightarrow z = \frac{9000000 \cdot 13392000}{27900000} = 4320000 \text{ €}.$$

Solución: os acredores deben recibir 4080000 €, 4992000 € e 4320000 €, respectivamente.

38. Un padre asigna semanalmente a cada un dos seus fillos, de 8, 12 e 16 anos, unha cantidade directamente proporcional a súa idade. Calcula canto entrega a cada un, sabendo que o total da asignación ascende a 162 €.

Solución:

Sexa x a cantidade que percibe o fillo de 8 anos, y a que percibe o de 12 anos e z a que percibe o de 16 anos.

$$8 + 12 + 16 = 36;$$

$$\left. \begin{array}{l} 36 \rightarrow 162 \\ 8 \rightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{8 \cdot 162}{36} = 36.00 \text{ €};$$

$$\left. \begin{array}{l} 36 \rightarrow 162 \\ 12 \rightarrow y \end{array} \right\} \rightarrow y = \frac{12 \cdot 162}{36} = 54.00 \text{ €};$$

$$\left. \begin{array}{l} 36 \rightarrow 162 \\ 16 \rightarrow z \end{array} \right\} \rightarrow z = \frac{16 \cdot 162}{36} = 72.00 \text{ €}.$$

Solución: percibe, respectivamente, 36.00€, 54.00€ e 72.00€.

2.3.2. Reparto proporcional composto



Reparto proporcional composto, no que o reparto se efectúa con relación a varias series combinadas de números. Pode ser directo, inverso e mixto.

- Para a resolución do reparto composto basta lembrarse de que cando unha magnitude é directa ou inversamente proporcional a outras varias, tamén é directa ou inversamente *proporcional ao seu produto*. Así, para repartir unha cantidade concreta proporcionalmente a varias series de números, é dicir, resolver un reparto proporcional composto, hai que tomar como números con respecto ós que hai que repartir proporcionalmente os produtos dos termos correspondentes en cada serie (ou do seu inverso, se é proporcionalidade inversa), e logo faise o reparto proporcional simple.



39. Descompón o número 529 en tres sumandos que sexan directamente proporcionais a 1, 2 e 3, e inversamente proporcionais a 4, 5 e 6.

Solución:

O problema redúcese a facer o reparto proporcional dese número en partes directamente proporcionais a $1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, $2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ e

$$3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{23}{20}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{23}{20} \rightarrow 529 \\ \frac{1}{4} \rightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow \frac{529}{x} = \frac{23/20}{1/4} \rightarrow x = \frac{529 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{23}{20}} = 115;$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{23}{20} \rightarrow 529 \\ \frac{2}{5} \rightarrow y \end{array} \right\} \rightarrow \frac{529}{y} = \frac{23/20}{2/5} \rightarrow y = \frac{529 \cdot \frac{2}{5}}{\frac{23}{20}} = 184;$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{23}{20} \rightarrow 529 \\ \frac{1}{2} \rightarrow z \end{array} \right\} \rightarrow \frac{529}{z} = \frac{23/20}{1/2} \rightarrow z = \frac{529 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{23}{20}} = 230.$$

Solución: as partes son 115, 184 e 230, respectivamente

40. Tres poboacións limítrofes A, B e C deciden construír un polideportivo de uso conxunto, cun valor de 1121369.63 €. O importe da construción repártese en partes directamente proporcionais a 12000, 3500 e 8250, que son as súas respectivas poboacións, e inversamente proporcionais a 300, 140 e 110, respectivamente, que son os deportistas de alto nivel que teñen na actualidade cada unha desas poboacións. Calcula canto debe abonar cada poboación.

Solución:

1121369.63 é directamente proporcional a $\frac{12000}{300} = 40$, $\frac{3500}{140} = 25$ e $\frac{8250}{110} = 75$. En consecuencia tense o reparto:

$$\left. \begin{array}{l} 140 \rightarrow 1121369.63 \\ 40 \rightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{40 \cdot 1121369.63}{140} \approx 320391.32 \text{ €};$$

$$\left. \begin{array}{l} 140 \rightarrow 1121369.63 \\ 25 \rightarrow y \end{array} \right\} \rightarrow y = \frac{25 \cdot 1121369.63}{140} \approx 200244.58 \text{ €};$$

$$\left. \begin{array}{l} 140 \rightarrow 1121369.63 \\ 75 \rightarrow z \end{array} \right\} \rightarrow z = \frac{75 \cdot 1121369.63}{140} \approx 600733.73 \text{ €}.$$

Solución: a poboación A debe aportar 320391.32 €, a poboación B aportará 200244.58 € e a poboación C deberá aportar 600733.73 €.

41. Divide $\frac{5}{6}$ en tres partes que sexan directamente proporcionais a $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{4}$ e inversamente proporcionais a $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{3}$.

Solución:

O problema redúcese a dividir o número en partes proporcionais a $\frac{1}{2} \div \frac{1}{5} = \frac{5}{2}$; $\frac{1}{6} \div \frac{1}{8} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ e $\frac{1}{4} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$; $\frac{5}{2} + \frac{4}{3} + \frac{3}{4} = \frac{55}{12}$.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{55}{12} \rightarrow \frac{5}{6} \\ \frac{5}{2} \rightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow \frac{5/6}{x} = \frac{55/12}{5/2} \rightarrow \boxed{x = \frac{5}{11}}; \quad \left. \begin{array}{l} \frac{55}{12} \rightarrow \frac{5}{6} \\ \frac{4}{3} \rightarrow y \end{array} \right\} \rightarrow \frac{5/6}{y} = \frac{55/12}{4/3} \rightarrow \boxed{y = \frac{8}{33}}; \quad \left. \begin{array}{l} \frac{55}{12} \rightarrow \frac{5}{6} \\ \frac{3}{4} \rightarrow z \end{array} \right\} \rightarrow \frac{5/6}{z} = \frac{55/12}{3/4} \rightarrow \boxed{z = \frac{3}{22}}.$$

Solución: as partes son $x = \frac{5}{11}$, $y = \frac{8}{33}$ e $z = \frac{3}{22}$.



42. Tres alumnos participan nun concurso e gañan un premio de 2390.50 €. O reparto faise en partes directamente proporcionais ao número de días dedicados o traballo do concurso (22, 35 e 40 días, respectivamente) e inversamente proporcional ao importe do material deteriorado por negligencia (300 €, 155 € e 210 €, respectivamente). Calcula o que lle correspondeu a cada un.

Solución:

O problema é facer un reparto directamente proporcional á $\frac{22}{300} = \frac{11}{150}$, $\frac{35}{155} = \frac{7}{31}$ e $\frac{40}{210} = \frac{4}{21}$; $\frac{11}{150} + \frac{7}{31} + \frac{4}{21} = \frac{15937}{32550}$;

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{15937}{32550} \rightarrow 2390.50 \\ \frac{11}{150} \rightarrow x \end{array} \right. \rightarrow x = \frac{11}{150} \cdot \frac{2390.50}{\frac{15937}{32550}} = \frac{11}{150} \cdot \frac{32550 \cdot 2390.50}{15937} = 358.042 \text{ €};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{15937}{32550} \rightarrow 2390.50 \\ \frac{7}{31} \rightarrow y \end{array} \right. \rightarrow y = \frac{7}{31} \cdot \frac{32550 \cdot 2390.50}{15937} = 1102.4769 \text{ €};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{15937}{32550} \rightarrow 2390.50 \\ \frac{4}{21} \rightarrow z \end{array} \right. \rightarrow z = \frac{4}{21} \cdot \frac{32550 \cdot 2390.50}{15937} = 929.98 \text{ €}.$$

Solución: os alumnos recibirán, respectivamente, 358.042 €, 1102.4769 € e 929.98 €.

2.4. Falsa posición

✚ A *falsa posición*, *suposición* ou *método da hipótese* abarca os procedementos de resolución que se valen de datos hipotéticos ou falsos para dar co verdadeiro resultado dunha cuestión aritmética.

O procedemento, usualmente, é o seguinte:

- Elíxese arbitrariamente un, dous ou máis números que se relacionan entre si conforme ás condicións estipuladas no problema, e cos que se executan oportunamente as combinacións necesarias para dar cos resultados falsos análogos ós verdadeiros que se tratan de averiguar.
- Establécese a proporción subseguinte determinada pola igualdade de relación entre algún dos datos arbitrarios e outro dos verdadeiros, e entre o resultado falso e o verdadeiro descoñecido, co que se formará unha cuarta proporcional fácil de despxar.

43. Averigua o importe dunha cantidade tal que a súa metade, máis o terzo e o quinto desa cantidade suman 12400 €.

Solución:

$\text{mcm}(2,3,5) = 30$; supoñamos un capital de 60 €, por exemplo.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{metade de } 60 = 30 \\ \text{tercio de } 60 = 20 \\ \text{quinto de } 60 = 12 \\ \text{Total: } \overline{62} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 62 \leftrightarrow 60 \\ 12400 \leftrightarrow x \end{array} \right. \rightarrow x = \frac{60 \cdot 12400}{62} = 12000 \text{ €}.$$

Solución: a cantidade buscada é de 12000 €.

44. Cal é o número que aumentado na súa metade máis a súa terceira parte, máis a súa cuarta parte sumen 1000 ?

Solución:

Facémolo polo método da *falsa posición*: tendo en conta que 12 é múltiplo de 2, 3 e 4 (os denominadores), tense:

$$12 + \frac{12}{2} + \frac{12}{3} + \frac{12}{4} = 25; \left\{ \begin{array}{l} 25 \rightarrow 12 \\ 1000 \rightarrow x \end{array} \right. \rightarrow x = \frac{1000 \cdot 12}{25} = 480.$$

Solución: o número é o 480.

3. PORCENTAXES: TANTOS POR CENTO E POR MIL

As porcentaxes son unhas das habilidades matemáticas máis empregadas na vida diaria, no comercio, nos medios de comunicación, ..., e sen embargo, non sempre se manexan con demasiada eficacia.



O *tanto por cento* empréganse para determinar a cantidade que se corresponde con outra dada, coñecendo a que corresponde a 100.

- O tanto por cento e é un caso particular da regra de tres e represéntanse por %.
- De xeito similar, o tanto por mil emprégase para determinar a cantidade que se corresponde con outra dada, coñecendo a que corresponde a 1000. Tamén é un caso particular da regra de tres, e represéntase por ‰.

45. En 100 litros de auga disolvemos 20 kg de azucre. Cantos litros de auga ou azucre será necesario engadir para que a disolución sexa do 20%?

Solución:

Nunha disolución ao 20% haberá, en peso, por cada 100 partes, 20 de azucre e 80 de auga.

$$\left. \begin{array}{l} 80 \text{ litros} \rightarrow 20 \text{ kg} \\ 100 \text{ litros} \rightarrow x \text{ kg} \end{array} \right\} \rightarrow x = 25.$$

Como se necesitan 25 kg de azucre e xa hai 20 kg teremos que engadir $25 - 20 = 5$ kg de azucre.

Solución: hai que engadir 5 kg de azucre.

3.1. Tipos básicos de problemas de porcentaxes

Aparecen os seguintes tipos de problemas básicos: cálculo da porcentaxe, cálculo do tipo, cálculo da base e porcentaxe de variación:

3.1.1. Cálculo da porcentaxe

46. Determina o 15% de 620.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 620 \leftarrow 100\% \\ x \leftarrow 15\% \end{array} \right\} \leftrightarrow x = \frac{620 \cdot 15}{100} = 93.$$

Solución: o 15% de 620 é 93.

47. O prensado de 1500 kg de semente de liño produciu o 32% do seu peso de aceite. Cantos quilos de aceite se obtiveron?

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 100 \rightarrow 32 \\ 1500 \rightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{1500 \cdot 32}{100} = 480.$$

Solución: obtivéronse 480 kg de aceite.

3.1.2. Cálculo do tipo

48. Que tanto por cento —porcentaxe— é 45 de 150?

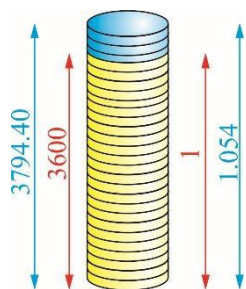
Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 150 \rightarrow 100\% \\ 45 \rightarrow x\% \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{45 \cdot 100}{150} = 30\%.$$

Solución: 45 representa o 30% de 150.

49. Púxose un capital de 3600 euros no banco; un ano despois transformouse en 3794.4 euros. Que tanto por cento aumentou?

Solución:



De dúas maneiras:

- O capital aumentou $3794.40 - 3600 = 194.40 \text{ €} \rightarrow \frac{194.40}{3600} \cdot 100 = 5.4 \rightarrow$ o aumento foi do 5.4%.
- $\frac{3794.40}{3600} = 1.054 \rightarrow 1.054$ significa: a cantidade máis 5.4 centésimas $\rightarrow$ o aumento foi do 5.4%.



É conveniente acostumarse á notación do segundo procedemento de resolución do exemplo 49, polo que citamos algunhas expresións máis do tipo anterior para practicar:

- $C \rightarrow 1.054C$: aumento do 5.4% : $(1.054-1) \cdot 100 = 5.4$.
- $C \rightarrow 1.235C$: aumento do 23.5% : $(1.235-1) \cdot 100 = 23.5$.
- $C \rightarrow 0.93C$: diminución do 7% : $(1-0.93) \cdot 100 = 7$.
- $C \rightarrow 0.765C$: diminución do 23.5% : $(1-0.765) \cdot 100 = 23.5$.

3.1.3. Cálculo da base

50. Se 525 representa o 7% dunha determinada cantidade, determina a cantidade citada.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 525 \leftarrow 7\% \\ x \leftarrow 100\% \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{525 \cdot 100}{7} = 7500.$$

Solución: a cantidade buscada é 7500.

51. Pagáronse 18.42 € por unha botella de viño, mercándoo cunha rebaixa do 5% por promoción. A canto se paga a botella sen esta rebaixa?

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 95 \text{ € pagados} \rightarrow 100 \text{ € do importe} \\ 18.42 \text{ € pagados} \rightarrow x \text{ € do importe} \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{18.42 \cdot 100}{95} = 19.3894 \approx 19.39 \text{ €}.$$

Solución: o custo da botella de viño sen rebaixa é dun 19.39 €.

3.1.4. Variacións porcentuais

Nas *variacións porcentuais* emprégase fundamentalmente:

$$a + \% \Delta a = b \equiv a + \frac{xa}{100} = b \leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{b-a}{a} \cdot 100 \\ a \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right) = b \rightarrow a = \frac{b}{1 + \frac{x}{100}} \end{cases}$$

Incrementos porcentuais:

- Se C aumenta o $r\%$ transfórmase en $C + \frac{C \cdot r}{100} = C \left(1 + \frac{r}{100}\right)$: $C \xrightarrow{\Delta+r\%} \left(1 + \frac{r}{100}\right)C$.

52. Por exemplo, se C aumenta o 12% transfórmase en $1.12C$: $C + \frac{C \cdot 12}{100} = C \left(1 + \frac{12}{100}\right) = 1.12 \cdot C$ ($1.12 = 1 + 0.12$).

53. O aluguer dun piso pasa de 650 € a 700 € mensuais. Calcula a porcentaxe de aumento.

Solución:

Sexa x a porcentaxe de aumento:

$$650 + \frac{650 \cdot x}{100} = 700 \rightarrow x = \frac{(700-650) \cdot 100}{650} = \frac{100}{13} \% = 7.6923\%.$$

Solución: o importe do aluguer incrementouse nun 7.6923%.

Diminucións porcentuais:

- Se C diminúe o $r\%$ transfórmase en $C - \frac{C \cdot r}{100} = C \left(1 - \frac{r}{100}\right)$: $C \xrightarrow{\Delta-r\%} \left(1 - \frac{r}{100}\right)C$.

54. Por exemplo se C diminúe o 12% transfórmase en $0.88C$:

$$C - \frac{C \cdot 12}{100} = C \left(1 - \frac{12}{100}\right) = 0.88 \cdot C$$
 ($0.88 = 1 - 0.12$).



- Nun aumento ou diminución porcentual a expresión $1 + \frac{x}{100}$ recibe o nome de *índice de variación*, e é o número polo que hai que multiplicar a cantidade inicial para obter a cantidade final.

55. Por exemplo, se C aumenta o 12% transfórmase en $1.12C$: $C \xrightarrow{\Delta+12\%} 1.12C$, e neste caso o índice de variación é 1.12.

- Nun *aumento porcentual* do $r\%$ o índice de variación é $1 + \frac{r}{100}$.
- Nunha *diminución porcentual* do $r\%$ o índice de variación é $1 - \frac{r}{100}$.

Para *calcular o valor final*, nun aumento ou nunha diminución porcentual, calcúlase o índice de variación (que convén expresalo en forma decimal) e multiplícase pola cantidade inicial.

Para *encadear aumentos e diminucións porcentuais*, calcúlanse os índices de variación correspondentes ós distintos pasos e multiplícanse. Obtense, así, o índice de variación global.

56. Calcula en canto se transforma unha cantidade C ao sufrir un aumento do 12%.

Solución:

$$C \xrightarrow{\text{ao engadirle o 12\%}} C + \frac{12}{100}C = C + 0.12C = (1 + 0.12)C = 1.12C$$

Conclusión:

Se C aumenta o 12%, transfórmase en $1.12C$ (a cantidade máis 12 centésimas).

57. Calcula en canto se transforma unha cantidade C ao sufrir unha diminución do 12%:

$$C \xrightarrow{\text{ao restarlle o 12\%}} C - \frac{12}{100}C = C - 0.12C = (1 - 0.12)C = 0.88C$$

Conclusión:

Se C diminúe o 12%, transfórmase en $0.88C$ (a cantidade menos 12 centésimas).

58. Mercouse un libro por 20.50€, pagando de manipulación 1.5 €. Desexando obter na súa venda un beneficio do 10%, ¿en canto se ten que vender?

Solución:

I. Custo total: $20.50 + 1.50 = 22$ €; ganará na venda $\frac{22 \cdot 10}{100} = 2.20$ €.

O valor da venda será de $22 + 2.20 = 24.20$ €.

II. Dunha maneira máis inmediata $22 \cdot 1.10 = 24.20$ €.

Solución: debe venderse en 24.20€.

59. Un obxecto de ferraxería vendeuse por 0.30€ con ganancia do 20% sobre o prezo de compra. En canto se mercara?

Solución:

I.
$$\left. \begin{array}{l} 120 \text{ € de venda} \rightarrow 100 \text{ € de compra} \\ 0.30 \text{ € de venda} \rightarrow x \text{ € de compra} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{100}{x} = \frac{120}{0.30} \rightarrow x = \frac{0.30 \cdot 100}{120} = 0.25 \text{ €}.$$

II. Dunha maneira máis inmediata: $0.30 \div 1.20 = 0.25$ €.

Solución: mercárase en 0.25€.

60. Di cál é a variación porcentual que corresponde a cada unha das seguintes transformacións:

60.1. $C \rightarrow 1.15C$. 60.2. $C \rightarrow 1.2C$. 60.3. $C \rightarrow 1.042C$. 60.4. $C \rightarrow 0.85C$. 60.5. $C \rightarrow 0.8C$. 60.6. $C \rightarrow 0.958C$.

Solución:

60.1. $C \rightarrow 1.15C \rightarrow$ Aumento do 15%: $(1.15 - 1) \cdot 100 = 15$.

60.2. $C \rightarrow 1.2C \rightarrow$ Aumento do 20%: $(1.2 - 1) \cdot 100 = 20$.



$$60.3. C \rightarrow 1.042C \rightarrow \text{Aumento do } 4.2\% : (1.042 - 1) \cdot 100 = 4.2.$$

$$60.4. C \rightarrow 0.85C \rightarrow \text{Diminución do } 15\% : (1 - 0.85) \cdot 100 = 15.$$

$$60.5. C \rightarrow 0.8C \rightarrow \text{Diminución do } 20\% : (1 - 0.8) \cdot 100 = 20.$$

$$60.6. C \rightarrow 0.958C \rightarrow \text{Diminución do } 4.2\% : (1 - 0.958) \cdot 100 = 4.2.$$

61. Di cal é a variación porcentual que corresponde a cada unha das seguintes transformacións:

$$61.1. 8000\text{€} \rightarrow 9360\text{€}.$$

$$61.2. 12560\text{€} \rightarrow 11932\text{€}.$$

$$61.3. 12000 \text{ persoas} \rightarrow 10320 \text{ persoas}.$$

$$61.4. 23500 \text{ persoas} \rightarrow 31725 \text{ persoas}.$$

Solución:

En xeral, faremos: $a + \frac{xa}{100} = b \rightarrow x = \frac{b-a}{a} \cdot 100$ para buscar a porcentaxe de cambio.

$$61.1. 8000\text{€} \rightarrow 9360\text{€} \rightarrow \frac{9360 - 8000}{8000} \cdot 100 = 17 \rightarrow \text{aumentou un } 17\%.$$

$$61.2. 12560\text{€} \rightarrow 11932\text{€} \rightarrow \frac{11932 - 12560}{12560} \cdot 100 = -5 \rightarrow \text{diminuíu un } 5\%.$$

$$61.3. 12000 \text{ persoas} \rightarrow 10320 \text{ persoas} \rightarrow \frac{10320 - 12000}{12000} \cdot 100 = -14 \rightarrow \text{diminuíu un } 14\%.$$

$$61.4. 23500 \text{ persoas} \rightarrow 31725 \text{ persoas} \rightarrow \frac{31725 - 23500}{23500} \cdot 100 = 35 \rightarrow \text{aumentou un } 35\%.$$

62. No contrato de traballo dun empregado fíxase unha suba anual do 6.5 %. Se empeza gañando 800 € ao mes, cantos anos teñen que pasar para que gañe 1500 €?

Solución:

Ao cabo de un ano gañará: $800 \cdot 1.065 \text{ €}$.

Ao cabo de dous anos gañará: $800 \cdot (1.065)^2 \text{ €}$.

Ao cabo de n anos gañará: $800 \cdot (1.065)^n \text{ €}$.

$$800 \cdot (1.065)^n = 1500 \rightarrow (1.065)^n = \frac{1500}{800} = 1.875.$$

Despexamos n tomando logaritmos:

$$n \cdot \log(1.065) = \log(1.875) \rightarrow n = \frac{\log(1.875)}{\log(1.065)} \approx 9.98 \rightarrow 10 \text{ anos}.$$

Solución: terán que pasar uns 10 anos.

63. O custo da vida, nun certo país, subiu o 15% un ano e o 6% ao ano seguinte, e baixou o 5% durante o terceiro ano, ¿cal foi a suba total neses tres anos?

Solución:

Calculamos en qué se transforma o prezo de algo que valía 100 euros ao comezo do primeiro ano:

$$1^\circ \text{ ano: } 100 \xrightarrow{+15\%} 1.15 \cdot 100 = 115 \text{ €}.$$

$$2^\circ \text{ ano: } 115 \xrightarrow{+6\%} 1.06 \cdot 115 = 121.90 \text{ €}.$$

$$3^\circ \text{ ano: } 121.90 \xrightarrow{-5\%} 0.95 \cdot 121.90 = 115.805 \text{ €}.$$

O aumento total ($100 \rightarrow 115.805$) foi 15.805%.

Podería calcularse máis directamente así: $1.15 \cdot 1.06 \cdot 0.95 = 1.15805 \rightarrow 15.805\%$.

Solución: a suba total neses tres anos foi do 15.805%.



64. Con frecuencia os medios de comunicación cometen erros ao utilizar as porcentaxes. A seguinte noticia publicada o 26/7/1996: «Duro golpe aos funcionarios: no 97 non terán suba salarial. En só cinco anos perderán o 10.8 do seu poder adquisitivo» tiña como fundamento o os datos e os cálculos que se ven na táboa adxunta.

Analiza esa información, e corrobora ou desminte os datos que aportou o xornal.

Solución:

- Calculamos o índice de variación da suba do soldo durante os anos que indica a táboa:

$$I_1 = \left(1 + \frac{1.8}{100}\right) \left(1 + \frac{0}{100}\right) \left(1 + \frac{3.5}{100}\right) \left(1 + \frac{3.5}{100}\right) \left(1 + \frac{0}{100}\right) = 1.018 \cdot 1 \cdot 1.035 \cdot 1.035 \cdot 1 = 1.0905.$$

- Analogamente, o índice de variación do IPC é:

$$I_2 = 1.049 \cdot 1.043 \cdot 1.043 \cdot 1.035 \cdot 1.026 = 1.2118.$$

- A diferenza entre ambos é a perda de poder adquisitivo:

$$I_2 - I_1 = 0.1213 \rightarrow 12.13\%.$$

Solución: os funcionarios perderan o 12.13% do seu poder adquisitivo, e non o 10.8%, como se publicitaba.

65. Canto debe abonarse pola compra dunha máquina de escribir que ten un prezo é de 935 €, se se aplicou un desconto do 15 %?

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 935 \text{ €} \rightarrow 100\% \\ x \text{ €} \rightarrow 85\% \end{array} \right\} \rightarrow \frac{935}{x} = \frac{100}{85} \rightarrow x = \frac{935 \cdot 85}{100} = 794.75 \text{ €}.$$

Solución: deben pagarse 794.75 €.

66. Calcula o prezo dun paraguas, sabendo que, tras beneficiarse dun desconto do 15%, o seu importe ascende a 51 €.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 51 \text{ €} \rightarrow 85\% \\ x \text{ €} \rightarrow 100\% \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{51 \cdot 100}{85} = 60 \text{ €}.$$

Solución: o prezo era de 60 €.

67. Na táboa adxunta aparecen os datos das subas do IPC e das subas dos salarios dos funcionarios ao longo de varios anos.

67.1. Calcula a perda do poder adquisitivo que tiveron os funcionarios durante ese período.

67.2. Calcula a perda do poder adquisitivo que tiveron dende o ano 2000.

Solución:

67.1. Ampliamos a táboa con máis columnas para facilitar os cálculos. Tomamos como base o ano 1999, e consideramos como acumulado a porcentaxe dese ano. A partir de aí, facémolo de dúas maneiras:

$$I. \left(1 + \frac{6.20}{100}\right) \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 1.1151, (1.1151 - 1) \cdot 100 = 11.51.$$

$$\left(1 + \frac{11.51}{100}\right) \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 1.170855, (1.170855 - 1) \cdot 100 = 17.0855 \approx 17.09, \dots$$

Analogamente podemos facer para o %Δ IPC :

$$\left(1 + \frac{6.50}{100}\right) \left(1 + \frac{5.50}{100}\right) = 1.123575, (1.123575 - 1) \cdot 100 = 12.3575 \approx 12.36,$$

$$\left(1 + \frac{12.3575}{100}\right) \left(1 + \frac{5.30}{100}\right) = 1.183124475,$$

$$(1.183124475 - 1) \cdot 100 = 18.31244 \approx 18.31, \dots$$

Ano	%Δ func.	%Δ IPC
1990	6.20	6.50
1991	5.00	5.50
1992	5.00	5.30
1993	1.80	4.90
1994	0.00	4.30
1995	3.50	4.30
1996	3.50	3.20
1997	0.00	2.00
1998	2.10	1.40
1999	1.80	2.90
2000	2.00	4.00
2001	2.00	2.70
2002	2.00	4.00
2003	2.00	2.60
2004	2.70	3.20
2005	3.10	3.80
2006	2.00	2.70
2007	2.00	4.20

A diferenza entre a porcentaxe de incremento do IPC e a porcentaxe de suba do salario dos funcionarios indica, ano a ano, a perda acumulada dende o ano 1990.



Ano	%Δ func.	%Δ IPC	ΣΔ func.	ΣΔ IPC	Diferenza	ΣΔ func.	ΣΔ IPC	Diferenza
1990	6.20	6.50	6.20	6.50	0.30	1.0620	1.0650	0.0030
1991	5.00	5.50	11.51	12.36	0.85	1.1151	1.1236	0.0085
1992	5.00	5.30	17.09	18.31	1.23	1.1709	1.1831	0.0123
1993	1.80	4.90	19.19	24.11	4.92	1.1919	1.2411	0.0492
1994	0.00	4.30	19.19	29.45	10.25	1.1919	1.2945	0.1025
1995	3.50	4.30	23.36	35.01	11.65	1.2336	1.3501	0.1165
1996	3.50	3.20	27.68	39.33	11.65	1.2768	1.3933	0.1165
1997	0.00	2.00	27.68	42.12	14.44	1.2768	1.4212	0.1444
1998	2.10	1.40	30.36	44.11	13.75	1.3036	1.4411	0.1375
1999	1.80	2.90	32.71	48.29	15.58	1.3271	1.4829	0.1558
2000	2.00	4.00	35.36	54.22	18.86	1.3536	1.5422	0.1886
2001	2.00	2.70	38.07	58.38	20.31	1.3807	1.5838	0.2031
2002	2.00	4.00	40.83	64.72	23.89	1.4083	1.6472	0.2389
2003	2.00	2.60	43.65	69.00	25.35	1.4365	1.6900	0.2535
2004	2.70	3.20	47.53	74.41	26.88	1.4753	1.7441	0.2688
2005	3.10	3.80	52.10	81.04	28.94	1.5210	1.8104	0.2894
2006	2.00	2.70	55.14	85.93	30.78	1.5514	1.8593	0.3078
2007	2.00	4.20	58.25	93.73	35.49	1.5825	1.9373	0.3549

II. $\left(1 + \frac{6.20}{100}\right) = 1.0620$, $\left(1 + \frac{6.2}{100}\right)\left(1 + \frac{5}{100}\right) = 1.1151$, $\left(1 + \frac{6.2}{100}\right)\left(1 + \frac{5}{100}\right)\left(1 + \frac{5}{100}\right) = 1.170855 \approx 1.1709$, ...

Analogamente podemos facer para o %Δ IPC :

$$\left(1 + \frac{6.50}{100}\right) = 1.065, \left(1 + \frac{6.50}{100}\right)\left(1 + \frac{5.50}{100}\right) = 1.123575 \approx 1.1236,$$

$$\left(1 + \frac{6.50}{100}\right)\left(1 + \frac{5.50}{100}\right)\left(1 + \frac{5.30}{100}\right) = 1.183124475 \approx 1.1831, \dots$$

Seguindo co procedemento, ao remate dos cálculos vese que a perda de poder adquisitivo é do 35.49%.

67.2. Construímos unha táboa análoga á do apartado anterior, pero partindo do ano 2000:

Ano	%Δ func.	%Δ IPC	ΣΔ func.	ΣΔ IPC	Diferenza	ΣΔ func.	ΣΔ IPC	Diferenza
2000	2.00	4.00	2.000	4.000	2.000	1.0200	1.0400	0.0200
2001	2.00	2.70	4.040	6.808	2.768	1.0404	1.0681	0.0277
2002	2.00	4.00	6.121	11.080	4.960	1.0612	1.1108	0.0496
2003	2.00	2.60	8.243	13.968	5.725	1.0824	1.1397	0.0573
2004	2.70	3.20	11.166	17.615	6.450	1.1117	1.1762	0.0645
2005	3.10	3.80	14.612	22.085	7.473	1.1461	1.2208	0.0747
2006	2.00	2.70	16.904	25.381	8.477	1.1690	1.2538	0.0848
2007	2.00	4.20	19.242	30.647	11.405	1.1924	1.3065	0.1140

Así vese, que neste reducido período o salario dos funcionarios perdeu o 11.40% do seu valor adquisitivo.

68. Unha raqueta de tenis, valía, ao comezo da tempada, 28 euros. Ao longo do ano sufriu as seguintes variacións: subiu un 20%, baixou un 25%, subiu un 5%, baixou un 12%. Canto vale ao final da tempada? Cal foi o seu índice de variación total? Que porcentaxe debe subir para volver a custar 28 €?

Solución:

68.1. Prezo ao final da tempada: $28 \cdot 1.2 \cdot 0.75 \cdot 1.05 \cdot 0.88 = 23.2848 \text{ €}$.

68.2. Índice de variación: $1.2 \cdot 0.75 \cdot 1.05 \cdot 0.88 = 0.8316 \rightarrow$ baixa o prezo $1 - 0.8316 = 0.1684 \approx 16.84\%$.

68.3. Como o prezo final é de 23.2848 €, para chegar aos 28 € debe subir: $\frac{28 - 23.2848}{23.2848} \cdot 100 = 20.25\%$.



69. Un comerciante declarado en quebra só pode pagar o 35% de súas débedas. Tendo 80000 € máis, podería satisfacer o 55% das súas débedas.

69.1. Canto ten?

69.2. Canto debe?

Solución:

80000 € representan o $(55 - 35)\% = 20\%$ do seu haber. En consecuencia:

$$69.1. \left. \begin{array}{l} 20\% \rightarrow 80000 \\ 35\% \rightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{35 \cdot 80000}{20} = 140000 \text{ €}.$$

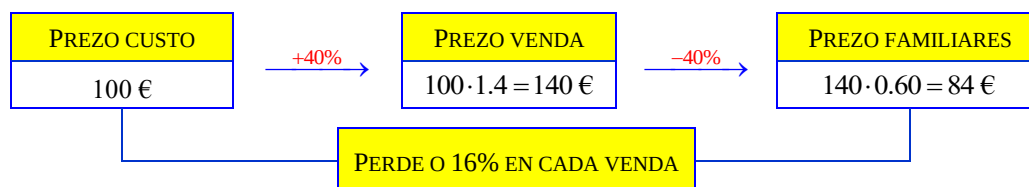
$$69.2. \left. \begin{array}{l} 20\% \rightarrow 80000 \\ 100\% \rightarrow y \end{array} \right\} \rightarrow y = \frac{100 \cdot 80000}{20} = 400000 \text{ €}.$$

Solución: ten 140000 € e debe 400000 €.

70. Un comerciante vende os artigos da súa tenda aumentando un 40% o prezo de custo. Aos seus familiares e amigos quere vendérllelos ao prezo de custo. Para iso dálles ós dependentes a orde de que lles rebaxen un 40% o prezo de venda ao público ¿obra adecuadamente?

Solución:

O comerciante comete un erro considerable. Vexámolo:



71. Se no exemplo 70 non se obrou adecuadamente, ¿que debería facer para que o desconto sexa correcto?

Solución:

$$\text{Prezo inicial} = \text{Prezo final} \div 1.4 = \text{Prezo final} \cdot \frac{1}{1.4} = \text{Prezo final} \cdot 0.714$$

Debería dicir que se dividise o prezo final entre 1.4 ou ben, que se lles rebaxase un 28.6% do prezo de venda, pois $1/1.4 = 0.714 = 1 - 0.286$.

Conclusión:

- Se a suba é do 40%, o prezo inicial calcúlase dividindo por 1.4.
- Se a suba é do $r\%$, o prezo inicial calcúlase dividindo por $1 + \frac{r}{100}$.
- Se encadeamos unha suba do $r\%$ cunha baixada do $r\%$, non chegamos á cantidade inicial, C , senón a unha cantidade menor que C , tanto máis pequena canto maior sexa r .

72. Vexamos en canto queda un artigo que aumenta o seu valor un $r\%$ e, a continuación, se lle rebaixa un $r\%$, para distintos valores de r .

r	PREZO INICIAL		PREZO DESPOIS DA SUBA		PREZO DESPOIS DA BAIXADA	PERDA RESPECTO AO PREZO INICIAL
10%	100	$\xrightarrow{+10\%}$	110	$\xrightarrow{-10\%}$	$100 \cdot 0.9 = 99$	1% da perda
20%	100	$\xrightarrow{+20\%}$	120	$\xrightarrow{-20\%}$	$120 \cdot 0.8 = 96$	4% da perda
50%	100	$\xrightarrow{+50\%}$	150	$\xrightarrow{-50\%}$	$150 \cdot 0.50 = 75$	25% da perda
80%	100	$\xrightarrow{+80\%}$	180	$\xrightarrow{-80\%}$	$180 \cdot 0.20 = 36$	64% da perda
100%	100	$\xrightarrow{+100\%}$	200	$\xrightarrow{-100\%}$	$200 \cdot 0 = 0$	100% da perda



73. Despois de subir un 20%, un artigo vale 45.60 euros. Canto valía antes da suba?

Solución:

$$x + \frac{20x}{100} = 45.60 \rightarrow x \left(1 + \frac{20}{100}\right) = 45.60 \rightarrow 1.2x = 45.60 \rightarrow x = \frac{45.60}{1.2} = 38 \text{ €}$$

Solución: antes da suba valía 38 €.

74. Despois de rebaixarse nun 35%, un artigo vale 81.90 euros. Canto valía antes da rebaixa?

Solución:

$$x - \frac{35x}{100} = 81.90 \rightarrow x \left(1 - \frac{35}{100}\right) = 81.90 \rightarrow 0.65x = 81.90 \rightarrow x = \frac{81.90}{0.65} = 126 \text{ €}$$

Solución: antes da rebaixa custaba 126 €.



Cando se fai unha venda con beneficio —ou perda—, a *porcentaxe de beneficio* pode calcularse sobre o prezo de venda ou sobre o prezo de custo.

- Se non se fai referencia a cal das porcentaxes se emprega, enténdese que é *sobre o prezo de custo*, que é o máis habitual. É máis, algunhas expresións carecerían de significado se o cálculo da porcentaxe se fixese sobre o prezo de venda.

75. Cómprase un artigo a 50 € e se vende a 80 €. Indica a porcentaxe de beneficio.

Solución:

O beneficio é de 30 €. Dámolo en porcentaxe:

- ① Se tomamos como base o prezo de compra, entón diremos que o beneficio é o 60% do prezo de compra, xa que

$$\frac{30 \cdot 100}{50} = 60\% .$$

Esta interpretación é a máis habitual.

- ② Se tomamos como base o prezo de venda, entón diremos que o beneficio é o 37.5% do prezo de venda, xa que

$$\frac{30 \cdot 100}{80} = 37.5\% .$$

76. Cómprase un artigo a un prezo P , dóbrase o seu prezo para obter o prezo de venda. Indica a ganancia con respecto ao prezo de compra.

Solución:

Se se compra a P e se vende a $2P$, a ganancia é P , e a porcentaxe de ganancia é do $\frac{P \cdot 100}{P} = 100\%$ con respecto ao prezo de compra.

- A expresión «*ganancia do 100% sobre o prezo de venda*», queredría dicir que non nos custou nada o artigo.
- Neste caso, de ter dobre prezo de venda que de custo, a porcentaxe de ganancia con respecto ao prezo de venda é do

$$\frac{P \cdot 100}{2P} = 50\% .$$

77. O IVE co que se gravaban os coches ata xaneiro do 1992 era do 33%. En xaneiro do 1992, ese imposto reduciuse ao 28%. En que porcentaxe se reduciu o prezo de venda ao público dos automóviles?

Solución:

Sexa P o prezo dun coche. Antes, o seu P.V.P. era de $1.33P$; coa redución do IVE, o seu P.V.P. é $1.28P$. A diminución do prezo é $0.05P$, e a porcentaxe de diminución é $\frac{0.05P}{1.33P} \cdot 100 = 3.7593\%$, menos do 3.76%.

Solución: a diminución do prezo foi dun 3.7593%.

78. Que perda por cento se sofre ao vender por 11.10 € un libro que custara 18.50 €?

Solución:

Perda: $18.50 - 11.10 = 7.40$ €; en consecuencia, a porcentaxe de perda pedida é a seguinte:

$$\left. \begin{array}{l} 18.50 \rightarrow 7.40 \\ 100 \rightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{100 \cdot 7.40}{18.50} = 40\% .$$

Solución: perdeu o 40%.



79. Se temos un depósito con 100 litros dun produto ao 10% de concentración en disolución acuosa, canta auga teremos que engadirlle para que a concentración sexa do 4%?

Solución:

Facémolo de varias maneiras:

- I. En 100 litros da disolución ao 10% hai 90 litros de auga e 10 de produto puro. Chamemos V ao volume total que hai ter para ter la disolución ao 4%.

$$\frac{10}{V} = \frac{4}{100} = 0.04 \rightarrow V = 250 \text{ litros.}$$

Polo tanto, como temos xa 100 litros, teremos que engadir $250 - 100 = 150$ litros de auga, co que a nova disolución terá $150 + 90 = 240$ litros de auga e 10 litros de produto puro.

- II. Sexa x a cantidade de auga que hai que engadir:

$$\frac{10}{100 + x} = \frac{4}{100} = 0.04 \equiv 4\% \rightarrow x = 150 \text{ litros}$$

- III. Sexa V o volume total pedido:

$$\left. \begin{array}{l} 4 \rightarrow 100 \\ 10 \rightarrow V \end{array} \right\} \rightarrow V = \frac{10 \cdot 100}{4} = 250 \text{ litros}$$

En consecuencia, teremos que engadir $250 - 100 = 150$ litros de auga.

Solución: hai que engadir 15 litros de auga.

80. Téñense 400 kg de auga salgada ao 28‰. Que cantidade de auga ten que evaporarse para que a disolución conteña o 32‰ de sal?

Solución:

A cantidade de sal contida na disolución é de $\frac{28 \cdot 400}{1000} = 11.2$ kg.

Sexa x a cantidade de auga que ten que evaporarse. Teremos:

$$\left. \begin{array}{l} 32 \rightarrow 1000 \\ 11.2 \rightarrow 400 - x \end{array} \right\} \rightarrow 400 - x = \frac{11.2 \cdot 1000}{32} = 350 \rightarrow x = 400 - 350 = 50 \text{ kg.}$$

Solución: hai que evaporar 50 kg de auga.

81. Parece que é asumido, tanto a nivel gobernamental como non gobernamental, que o 20% da poboación mundial dispoñemos do 80% dos recursos do planeta. Cantas veces somos máis ricos, en termos medios, no *Primeiro Mundo* que no *Terceiro Mundo*?

Solución:

É evidente que tanto no Primeiro Mundo como no Terceiro Mundo hai unhas diferenzas notables, tanto entre as nacións que o conforman, como entre os grupos e clases sociais desas nacións.

O 1% da poboación mundial gasta o 4% da riqueza mundial — $80/20 = 4$ —, mentres que o 1% da poboación do Terceiro Mundo gasta o 0.25% — $20/80 = 1/4 = 0.25$ — da riqueza mundial. Entón, a relación é entre 4 e $1/4$, é dicir, os países ricos, en media, gastamos 16 veces máis cos pobres.

☠ É frecuente que se tenda a considerar que só temos 4 veces máis recursos.

82. Un axente de vendas percibe mensualmente 800 € fixos e o 5% do valor das vendas. Ao cabo de 3 meses recibe en total 4500 €. Calcula o importe das vendas que fixo.

Solución:

O importe do salario fixo é de: $800 \cdot 3 = 2400$ €.

En consecuencia, polas vendas percibiu $4500 - 2400 = 2100$ €.

Polo tanto, o importe das vendas é:

$$\left. \begin{array}{l} 100 \text{ €} \rightarrow 5 \text{ €} \\ x \text{ €} \rightarrow 2100 \text{ €} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{100}{x} = \frac{5}{2100} \rightarrow x = \frac{2100 \cdot 100}{5} = 42000 \text{ €.}$$

Solución: o importe das vendas foi de 42000 €.



83. Unha persoa efectúa unha venda, ganando o 36% nos $\frac{3}{5}$ da compra e perdendo o 25% no resto. Recadou un total de 558000 €. Canto importaba a compra?

Solución:

Sexa x o importe da compra: $x + \frac{36}{100} \cdot \frac{3x}{5} - \frac{25}{100} \cdot \frac{2x}{5} = 558000 \rightarrow x = 500000 \text{ €}.$

Solución: o importe da compra era de 500000 €.

84. A que tanto por mil equivale unha rebaixa de 200 € sobre 8000 €?

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow 1000 \\ 200 \rightarrow 8000 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{x}{200} = \frac{1000}{8000} \rightarrow x = \frac{200 \cdot 1000}{8000} = 25 \text{ ‰}.$$

Solución: a rebaixa é do 25‰.

85. Un comerciante vendeu por 48.95€ unha mercancía que lle custara 44.50€. Que tanto por cento de beneficio realizou?

Solución:

Ganancia realizada: $48.95 - 44.50 = 4.45 \text{ €}.$

$$\left. \begin{array}{l} 44.50 \rightarrow 4.45 \\ 100 \rightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{4.45 \cdot 100}{44.50} = 10\%.$$

Solución: tivo un beneficio do 10%

86. Un individuo cobra un salario mensual de 1500 € netos, e como consecuencia do convenio colectivo pasa a cobrar 1552.50€.

86.1. Cal é o % de incremento?

86.2. Có mesmo incremento, canto cobrará unha persoa que teña un salario de 3500 €?

Solución:

86.1. Sexa x o % de incremento: $1500 + \frac{x \cdot 1500}{100} = 1552.50 \rightarrow x = \frac{(1552.50 - 1500) \cdot 100}{1500} = \frac{7}{2} = 3.5\%.$

86.2. $3500 \cdot 1.035 = 3622.50 \text{ €}.$

87. A cantidade necesaria para vivir nunha poboación, A , é os $\frac{3}{4}$ do que se necesita para vivir noutra poboación, B . Segundo isto, se un grupo de 7 traballadores dunha empresa gastan en A , durante 9 meses, 36288 €, ¿canto gastará outro grupo de 5 persoas durante 8 meses na poboación B ?

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{4} \rightarrow 7 \text{ personas} \rightarrow 9 \text{ meses} \rightarrow 36288 \text{ €} \\ 1 \rightarrow 5 \text{ personas} \rightarrow 8 \text{ meses} \rightarrow x \text{ €} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{36288}{x} = \frac{9}{8} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{\frac{3}{4}}{1} \rightarrow x = \frac{36288 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 1}{9 \cdot 7 \cdot \frac{3}{4}} = 30720 \text{ €}.$$

Solución: o segundo grupo gastará 30720 €.

88. Un cable de 3855 m á temperatura de 0° adquire a lonxitude de 3857.313 m cando a temperatura acada os 50°. Outro cable, do mesmo metal, de 5140 m á temperatura de 0°, que lonxitude acadará á temperatura de 75°?

Solución:

O incremento de lonxitude é de $\Delta = 3857.313 - 3855 = 2.313 \text{ m}.$ Entón temos a proporción:

$$\left. \begin{array}{l} 3855 \text{ m} \rightarrow \Delta 50^\circ \rightarrow \Delta 2.313 \text{ m} \\ 5140 \text{ m} \rightarrow \Delta 75^\circ \rightarrow \Delta x \end{array} \right\} \rightarrow \frac{2.313}{x} = \frac{3855}{5140} \cdot \frac{50}{75} \rightarrow x = \frac{2.313 \cdot 5140 \cdot 75}{3855 \cdot 50} = 4.626 \text{ m}.$$

En consecuencia, a lonxitude será de $5140 + 4.626 = 5144.626 \text{ m}.$

Solución: acadará unha lonxitude de 5144.626 m.



89. Un rapaz da 100 pasos nun minuto, e un home 3 pasos en 2 segundos. O primeiro avanza en cada paso 70 cm, e o segundo, 90 cm. Canto tardarán en facer un recorrido de 11340 m?

Solución:

O home da $3 \cdot \frac{60}{2} = 90$ pasos nun minuto. O rapaz recorre $100 \cdot \frac{70}{100} = 70$ m nun minuto e o adulto $90 \cdot \frac{90}{100} = 81$ m nun minuto.

Consecuentemente, en recorrer 11340 m tardan, respectivamente:

$$\left. \begin{array}{l} 70 \text{ m} \rightarrow 1 \text{ minuto} \\ 11340 \text{ m} \rightarrow x \text{ minutos} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{1}{x} = \frac{70}{11340} \rightarrow x = \frac{11340}{70} = 162 \text{ minutos};$$

$$\left. \begin{array}{l} 81 \text{ m} \rightarrow 1 \text{ minuto} \\ 11340 \text{ m} \rightarrow x \text{ minutos} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{1}{x} = \frac{81}{11340} \rightarrow x = \frac{11340}{81} = 140 \text{ minutos}.$$

Solución: o rapaz tarda 162 minutos e o adulto 140 minutos.

90. Nunha granxa de 1950 galiñas gástanse semanalmente 4200 € en pensos. En cantos días se consumirán 10000 € de pensos, noutra granxa de 6500 galiñas?

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 1950 \text{ galiñas} \rightarrow 7 \text{ días} \rightarrow 4200 \text{ €} \\ 6500 \text{ galiñas} \rightarrow x \text{ días} \rightarrow 10000 \text{ €} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{7}{x} = \frac{6500 \cdot 4200}{1950 \cdot 10000} \rightarrow x = \frac{7 \cdot 1950 \cdot 10000}{6500 \cdot 4200} = 5 \text{ días}.$$

Solución: en 5 días.

91. O transporte de 9 vagóns dunha certa mercancía, á distancia de 320 quilómetros, custou 47250 €. Canto custará o transporte de 12 vagóns da mesma mercancía a 500 Km de distancia?

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 9 \text{ V} \rightarrow 320 \text{ km} \rightarrow 47250 \text{ €} \\ 12 \text{ V} \rightarrow 500 \text{ km} \rightarrow x \text{ €} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{47250}{x} = \frac{320}{500} \cdot \frac{9}{12} \rightarrow x = \frac{47250 \cdot 500 \cdot 12}{9 \cdot 320} = 98437.50 \text{ €}.$$

Solución: custará 98437.50 €.

92. Para a explotación dun negocio asociáronse dous individuos: o primeiro aportou 45000 € e o segundo 36000 €. Ao rematar o negocio, resultou que o capital se reduciu a 63000 €. Cal é a perda de cada socio?

Solución:

A inversión total é de $45000 + 36000 = 81000$ €. A perda total é de $81000 - 63000 = 18000$ €. Sendo x e y as cantidades que perden respectivamente, tense o reparto:

$$\left. \begin{array}{l} 81000 \rightarrow 18000 \\ 45000 \rightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{45000 \cdot 18000}{81000} = 10000 \text{ € perde o primeiro,}$$

$$\left. \begin{array}{l} 81000 \rightarrow 18000 \\ 36000 \rightarrow y \end{array} \right\} \rightarrow y = \frac{36000 \cdot 18000}{81000} = 8000 \text{ € perde o segundo.}$$

Solución: o primeiro socio perde 10000 € e o segundo perde 8000 €.

93. Un deseñador maqueta 150 páxinas en 15 días, traballando 10 horas diarias. Cantos días empregaría traballando só 6 horas diarias?

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 150 \text{ páxinas} \rightarrow 15 \text{ días} \rightarrow 10 \frac{\text{h}}{\text{d}} \\ 150 \text{ páxinas} \rightarrow x \text{ días} \rightarrow 6 \frac{\text{h}}{\text{d}} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{15}{x} = \frac{6}{10} \rightarrow x = \frac{10 \cdot 15}{6} = 25 \text{ días}.$$

Solución: serían necesarios 25 días.

94. Un equipo de traballo de 5 persoas gastou nun restaurante 600 € en 8 días. De cantas persoas se compoñía outro equipo de traballo que gastou 630 € en 6 días?

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 5 \text{ pers} \rightarrow 600 \text{ €} \rightarrow 8 \text{ días} \\ x \text{ pers} \rightarrow 630 \text{ €} \rightarrow 6 \text{ días} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{5}{x} = \frac{600}{630} \cdot \frac{6}{8} \rightarrow x = \frac{5 \cdot 630 \cdot 8}{600 \cdot 6} = 7 \text{ persoas}.$$

Solución: o outro equipo de traballadores estaba formado por 7 persoas.



95. Un libreiro mercou un libro por 12.50 €, volvéndoo a vender cunha ganancia do 6%. En canto o vendeu?

Solución:

I. Gañou $\frac{12.50 \cdot 6}{100} = 0.75$ €; vendeuno por $12.50 + 0.75 = 13.25$ €.

II. Dunha maneira máis inmediata $12.50 \cdot 1.06 = 13.25$ €.

Solución: vendeu o libro en 13.25 €.

96. Calcula o que hai que pagar por asegurar unha mercancía de 3700 € para enviala por unha empresa de transportes, desexando cobrar, en caso de perda, o valor da mercancía e o importe do seguro, sabendo que cobran o 7.5% por asegurar a mercancía.

Solución:

Sexa x a prima que se ten que pagar para asegurar $3700 + x$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{para asegurar 100} \rightarrow 7.5 \text{ de prima} \\ \text{para asegurar } 3700 + x \rightarrow x \text{ de prima} \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{7.5 \cdot (3700 + x)}{100} \rightarrow 100x = 27750 + 7.5x \rightarrow 92.5x = 27750 \rightarrow x = \frac{27750}{92.5} = 300 \text{ €}.$$

Solución: hai que pagar unha prima de seguro de 300 €.

97. En certo tipo de xabón entran por cada 25 partes en peso de aceite de oliva, tres de aceite de coco e 30 de lixivia. Que cantidade de cada sustancia entra nunha tonelada métrica?

Solución:

Sexan x , y e z as cantidades de aceite de oliva, aceite de coco e lixivia. Tense:

$$\frac{x}{25} = \frac{y}{3} = \frac{z}{30} = \frac{1000}{25+3+30} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{25} = \frac{1000}{58} \rightarrow x = \frac{25 \cdot 1000}{58} = 431.034 \text{ kg.} \\ \frac{y}{3} = \frac{1000}{58} \rightarrow y = \frac{3 \cdot 1000}{58} = 51.724 \text{ kg.} \\ \frac{z}{30} = \frac{1000}{58} \rightarrow z = \frac{30 \cdot 1000}{58} = 517.241 \text{ kg.} \end{array} \right.$$

Solución: necesítanse 431.034 kg de aceite de oliva, 51.724 kg de aceite de coco e 517.241 kg de lixivia.

98. Como consecuencia de trasladar a vivenda dun sitio a outro, o aluguer dun piso pasou de 650 a 600 € ao mes. Calcula a porcentaxe de variación do aluguer.

Solución:

Sexa x a porcentaxe de variación:

$$650 + \frac{x \cdot 650}{100} = 600 \rightarrow x = \frac{(600 - 650) \cdot 100}{650} = -\frac{100}{13} \% = -7.6923\%.$$

Solución: produciuse un desconto do 7.6923%.

99. Unha sociedade deportiva vende participacións de lotería de Nadal a 2 € cada unha, nas que o comprador xoga a cantidade de 1.5 €. Que porcentaxe de recargo aplica a sociedade?

Solución:

Sexa x a porcentaxe de recargo:

$$1.5 + \frac{1.5x}{100} = 2 \rightarrow x = \frac{2 - 1.5}{1.5} \cdot 100 = 33.\hat{3}\%.$$

Solución: aplica un recargo do 33.3%.



100. Un repartidor de pizzas cobra en función do número de chanzos que ten que subir e baixar en cada entrega. Nunha entrega sube os chanzos de tres en tres e báixaos de dous en dous, dando un total de 100 pasos. Cantos chanzos teñen as escaleiras?

Solución:

Como a menor número de pasos corresponde maior número de chanzos, debe dividirse 100 en partes inversamente proporcionais aos números 2 e 3, ou o que é equivalente, en partes directamente proporcionais aos números $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$; tense que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Sexa x o número de pasos que da baixando e y o número de pasos que da subindo.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{5}{6} \rightarrow 100 \\ \frac{1}{2} \rightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow \frac{100}{x} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{2}} \rightarrow x = \frac{100 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{6}} = 60 \text{ pasos baixando} \rightarrow 2 \cdot 60 = 120 \text{ chanzos baixando.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{5}{6} \rightarrow 100 \\ \frac{1}{3} \rightarrow y \end{array} \right\} \rightarrow \frac{100}{y} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{3}} \rightarrow y = \frac{100 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} = 40 \text{ pasos subindo} \rightarrow 3 \cdot 40 = 120 \text{ chanzos subindo.}$$

101. Tres irmáns deben repartir unha certa cantidade proporcionalmente as súas idades. Gastan 5.60 € nunha calculadora para facer os cálculos e reparten o resto da maneira indicada, correspondéndolle ao primeiro 28 €, ao segundo 36 € e ao terceiro 48 €. Canto tería recibido cada un se non gastaran os 5.60 € da calculadora?

Solución:

$$28 + 36 + 48 = 112; 112 + 5.60 = 117.60.$$

$$\left. \begin{array}{l} 112 \rightarrow 28 \\ 117.60 \rightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow \frac{28}{x} = \frac{112}{117.60} \rightarrow x = 29.40 \text{ € recibiría o que percibiu } 28 \text{ €};$$

$$\left. \begin{array}{l} 112 \rightarrow 36 \\ 117.60 \rightarrow y \end{array} \right\} \rightarrow \frac{36}{y} = \frac{112}{117.60} \rightarrow y = 37.80 \text{ € recibiría o que percibiu } 36 \text{ €};$$

$$\left. \begin{array}{l} 112 \rightarrow 48 \\ 117.60 \rightarrow z \end{array} \right\} \rightarrow \frac{48}{z} = \frac{112}{117.60} \rightarrow z = 50.40 \text{ € recibiría o que percibiu } 48 \text{ €}.$$

Solución: recibirían 29.40 €, 37.80 € e 50.40 €, respectivamente.

102. Nunha discoteca mercaron un tonel de cervexa que abonda para 160 vasos, co 13% de alcohol, e cun prezo de 2.75 € o vaso. Para aumentar os beneficios adulteraron a cervexa, engadindo auga —que é gratis— e extracto de cervexa, que lles costa a 2 € por vaso e que aporta un 86% de alcohol. Deséxase determinar a cantidade de auga e de extracto de cervexa que deben engadir ás 160 cañas de cervexa para que resulte cada unha ao prezo de 1.50 € pero conservando a proporción de alcohol.

Solución:

Sexan x o número de vasos de auga e y o número de vasos de extracto de cervexa que se deben engadir. Téñense os seguintes datos:

$$\left\{ \begin{array}{l} 160 \text{ vasos} \rightarrow 13\% \text{ alcohol} \rightarrow 2.75 \text{ €/v} \\ x \text{ vasos} \rightarrow 0\% \text{ alcohol} \rightarrow 0 \text{ €/v} \\ y \text{ vasos} \rightarrow 86\% \text{ alcohol} \rightarrow 2 \text{ €/v} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 160 \cdot 2.75 + x \cdot 0 + y \cdot 2 = (160 + x + y) \cdot 1.50 \\ 160 \cdot 13 + x \cdot 0 + y \cdot 86 = (160 + x + y) \cdot 13 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - y = 400 \\ 13x = 73y \end{array} \right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{14600}{103} = 141.7475728 \approx 141.75 \\ y = \frac{2600}{103} = 25.24271844 \approx 25.24 \end{array} \right.$$

Solución: engadiranse uns 141.75 vasos de auga e 25.24 vasos de extracto de cervexa.



103. Obtén a idade dunha persoa sabendo que $\frac{1}{3}$, máis $\frac{1}{7}$, máis $\frac{1}{5}$ desta idade, sumen 35 anos.

Solución:

Empregamos a regra da falsa posición: $\text{mcm}(3,7,5)=105 \rightarrow$ supoñemos que a idade desa persoa é de 105 anos.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{tercio de } 105 = 35 \\ \text{séptimo de } 105 = 15 \\ \text{quinto de } 105 = 21 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{ccc} 71 & \rightarrow & 105 \\ 35 & \rightarrow & x \end{array} \rightarrow x = \frac{35 \cdot 105}{71} = 51.76 \text{ anos.}$$

Total: $\overline{71}$

Solución: esa persoa ten uns 51.76 anos.

104. Un boi atado a unha corda de 8.5 m de largo, e tarda 5 días en pacer toda a herba que está ao seu alcance. Se se acurta a corda ata deixala reducida a 4.25 m, ¿cantos días tardará en pacer toda a herba que está no círculo dentro do que pode moverse?

Solución:

Hai que decatarse de que se move nun círculo.

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi \cdot 8.5^2 \rightarrow 5 \text{ días} \\ \pi \cdot 4.25^2 \rightarrow x \text{ días} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{5}{x} = \frac{\pi \cdot 8.5^2}{\pi \cdot 4.25^2} \rightarrow x = \frac{5 \cdot 4.25^2}{8.5^2} = 1.25 \text{ días.}$$

Solución: tardará 1.25 días.

105. As abellas transforman o néctar das flores en mel, e libéranos dunha considerable parte de auga. Cantos kg de néctar teñen que transformar as abellas para obter 1 kg de mel, se sabemos que o néctar contén o 70% de auga e o mel que del se obtén o 17%?

Solución:

$$100\% - 17\% = 83\%; \quad 100\% - 70\% = 30\%.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ kg} \rightarrow 100\% \\ x \leftarrow 83\% \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{83 \cdot 1}{100} = 0.83 \text{ kg de extracto seco;}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0.83 \text{ kg} \rightarrow 30\% \\ y \leftarrow 100\% \end{array} \right\} \rightarrow y = \frac{100 \cdot 0.83}{30} = 2.76 \text{ kg de néctar.}$$

Solución: as abellas necesitarán transformar 2.76 kg de néctar.

106. Os fungos frescos conteñen o 90% de auga e os secos o 12%. Cantos kg de fungos secos se obtéñen de 500 kg de fungos frescos?

Solución:

$$500 \text{ kg de fungos secos producen } \frac{(100-90) \cdot 500}{100} = 50 \text{ kg de extracto seco} \equiv (100-12)\% \equiv 88\% \text{ do total de fungos secos.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 88\% \rightarrow 50 \text{ kg} \\ 100\% \rightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{100 \cdot 50}{88} = 56.81 \text{ kg de fungos secos.}$$

Solución: obteranse 56.81 kg de fungos secos.

107. Catro gandeiros, A, B, C e D, asociáronse para contribuír entre todos eles aos gastos dos facultativos que atenderan ao gando asegurado, proporcionalmente aos valores das ganderías nas datas da atención. Un día os gandeiros B e C pagaron 545.40 e 727.20 €, respectivamente, aos veterinarios que atenderon ao seu gando; nese día as ganderías aseguradas valoráronse en 101000, 120600, 65200 e 76800 €, respectivamente. En canto se resarciron B e C dos gastos de veterinario?.

Solución:

O valor das ganderías aseguradas é 363600 €, e os gastos a repartir importan a cantidade de $545.40 + 727.20 = 1272.60$ €. Entón B e C resarcíranse na diferenza entre as cantidades que pagaron aos veterinarios e o que reciben; sexan x e y as cantidades en que se indemniza aos gandeiros, respectivamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} 363600 \rightarrow 1272.60 \\ 120600 \rightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{120600 \cdot 1272.60}{363600} = 422.10 \text{ €; recupera } 545.40 - 422.10 = 123.30 \text{ €.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 363600 \rightarrow 1272.60 \\ 65200 \rightarrow y \end{array} \right\} \rightarrow y = \frac{65200 \cdot 1272.60}{363600} = 228.20 \text{ €; recupera } 727.20 - 228.20 = 499 \text{ €.}$$

Solución: o gandeiro B resácese en 123.30 € e o gandeiro C recupera 499 €.



108. Un rapaz mercou unha moto. Pagou de sinal ao mercala un cuarto do prezo da moto, e cando lla entregaron abonou o 20% do que aínda debía. Qué fracción do prezo da moto debe aínda?

Solución:

Despois de dar o sinal debía $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ do prezo da moto. Ao entregarlle a moto pagou $\frac{3}{4} \cdot \frac{20}{100} = \frac{3}{20}$ do prezo da moto; quedá-

lle por pagar $1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{20} = \frac{3}{5} \equiv 60\%$.

Solución: fáltalle por pagar o $\frac{3}{5} \equiv 60\%$.

109. Un comerciante merca un xénero por valor de 5000 €. Os gastos de transporte son o 1% dese valor, e os demais gastos son o 6% do xénero posto na tenda. Querendo vender cunha ganancia do 20% sobre o prezo de venda, acha o prezo de venda.

Solución:

O valor do xénero con tódolos gastos é: $5000 \cdot 1.01 \cdot 1.06 = 5353$; como desexa gañar o 20% sobre o prezo de venda, $5353 \equiv 80\%$ do prezo de venda; polo tanto:

$$\begin{cases} 80\% & \rightarrow 5353 \\ 100\% & \rightarrow x \end{cases} \rightarrow x = \frac{100 \cdot 5353}{80} = 6691.25 \text{ € é o prezo de venda.}$$

Solución: o prezo de vende debe ser de 6691.25 €.

110. A cantidade de auga dun encoro diminuíu nun 35% respecto ao que había no mes pasado. Agora contén 74.25 millóns de litros. Cantos litros tiña o mes pasado?

Solución:

$$x - \frac{35x}{100} = 74.25 \rightarrow x(1 - 0.35) = 74.25 \rightarrow x = \frac{74.25}{1 - 0.35} = \frac{74.25}{0.65} = 114.23 \text{ millóns de litros.}$$

Solución: o mes pasado tiña 114.23 millóns de litros.

111. Atópanse no monte tres cazadores. Dous deles invitan a comer ao terceiro, que non leva provisións. O primeiro aporta 300 gramos de xamón e o segundo 500 gramos de xamón. Ao rematar a comida, o cazador invitado dálles 8 € aos outros cazadores para que as repartan. Cómo deben facer o reparto, sabendo que cada un dos tres comeu a mesma cantidade de xamón e non sobrou nada?

Solución:

Se os tres comeron a mesma cantidade, cada un comeu $\frac{300+500}{3} = \frac{800}{3}$ do xamón. O primeiro cazador comeu $\frac{800}{3}$ gramos

do xamón e deulle ao invitado $300 - \frac{800}{3} = \frac{100}{3}$; do mesmo xeito, o segundo deulle $500 - \frac{800}{3} = \frac{700}{3}$ gramos. Polo tanto o pro-

blema redúcese a repartir 8 € en partes proporcionais a $\frac{100}{3}$ e $\frac{700}{3}$; $\frac{100}{3} + \frac{700}{3} = \frac{800}{3}$.

$$\begin{cases} \frac{800}{3} & \rightarrow 8 \\ \frac{100}{3} & \rightarrow x \end{cases} \rightarrow x = \frac{100}{3} \cdot \frac{8}{\frac{800}{3}} = \frac{100}{3} \cdot \frac{3 \cdot 8}{800} = 1 \text{ € que recibe o primeiro;}$$

$$\begin{cases} \frac{800}{3} & \rightarrow 8 \\ \frac{700}{3} & \rightarrow y \end{cases} \rightarrow y = \frac{700}{3} \cdot \frac{8}{\frac{800}{3}} = \frac{700}{3} \cdot \frac{3 \cdot 8}{800} = 7 \text{ € que debe recibir o segundo.}$$

Solución: o primeiro debe recibir 1 € e o segundo recibirá 7 €.



112. Tres socios obteñen uns beneficios de 38400 € de beneficio. O primeiro deles aportara á sociedade 250000 €, o segundo 470000 € e o terceiro 480000 €. Canto debe recibir cada un?

Solución:

$$250000 + 470000 + 480000 = 1200000 \text{ €};$$

$$\begin{cases} 1200000 \rightarrow 38400 \\ 250000 \rightarrow x \end{cases} \rightarrow x = 250000 \cdot \frac{38400}{1200000} = 8000 \text{ € recibirá o primeiro};$$

$$\begin{cases} 1200000 \rightarrow 38400 \\ 470000 \rightarrow y \end{cases} \rightarrow y = 470000 \cdot \frac{38400}{1200000} = 15040 \text{ € recibirá o segundo};$$

$$\begin{cases} 1200000 \rightarrow 38400 \\ 480000 \rightarrow z \end{cases} \rightarrow z = 480000 \cdot \frac{38400}{1200000} = 15360 \text{ € recibirá o terceiro}.$$

Solución: o primeiro recibirá 8000€, o segundo 15040 € e o terceiro 15360 €.

113. Pagouse 11.80 € por un libro que estaba rebaixado un 20%. Cal era o seu prezo antes da rebaixa?

Solución:

$$x - \frac{20x}{100} = 11.80 \rightarrow x \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 11.80 \rightarrow x = \frac{11.80}{0.80} = 14.75 \text{ €}.$$

Solución: o seu prezo antes da rebaixa era de 14.75 €.

114. Se o prezo dun artigo pasou de 35 € a 100 € nuns anos, cal é o índice de variación? Cal foi o aumento expresado en porcentaxes?

Solución:

$$\text{Índice de variación: } \frac{100}{35} = 2.8571.$$

$$\text{O aumento do prezo foi dun: } 35 + \frac{35x}{100} = 100 \rightarrow x = \frac{100 - 35}{35} \cdot 100 = 185.714\%.$$

115. Nun exame aprobaron o 60% dos estudantes. Na recuperación dos suspensos, aproban o 30%. En total son 18 os aprobados. Cal é a porcentaxe de aprobados? Cantos estudantes son?

Solución:

Hai que ter en conta que só o 40% se presenta á recuperación. Sumamos as porcentaxes dos que aproban.

$$\text{Porcentaxe de aprobados: } 60\% + \frac{30}{100} \cdot 40\% = 72\%. \text{ Sexa } x \text{ o número de estudantes: } \frac{72x}{100} = 0.72x = 18 \rightarrow x = \frac{18}{0.72} = 25 \text{ estu-}$$

dantes que hai en total.

Solución: hai 25 estudantes, e aproban o 72%

116. Calcula a resistencia que opón un cravo ao ser arrancado dunha táboa, se a forza aplicada no mango do martelo é de 23 quilogramos, e os brazos son $D = 250$ mm e $d = 38$ mm, segundo se ve na figura adxunta.

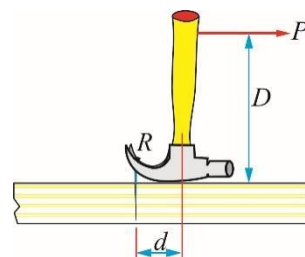
Nota: Nunha palanca sempre se cumpre a relación: “a potencia P aplicada é a resistencia vencida R , como o brazo d da resistencia é o brazo D da potencia” ou tamén: “a potencia multiplicada polo seu brazo é igual á resistencia polo seu”.

Solución:

$$\text{As anteriores condicións tradúcense en: } \frac{P}{R} = \frac{d}{D} \text{ é } P \cdot D = R \cdot d.$$

$$\text{Neste caso temos: } P \cdot D = R \cdot d \rightarrow 23 \cdot 250 = R \cdot 38 \rightarrow R = \frac{23 \cdot 250}{38} = 151.315789 \text{ kg}.$$

Solución: a resistencia é de 151.315789 kg.



3.2. Porcentaxes para época de eleccións

Nas campañas electorais fanse promesas de crecemento, faise balance do que se fixo, valóranse as contratacións de persoal feitas polos organismos públicos, analízanse as regulacións de emprego das empresas, valóranse os resultados das eleccións, ...

Utilízanse as matemáticas como símbolo de veracidade na transmisión da información, cando en moitos casos o seu uso só é adecuado para xustificar unha mentira ou para non dicir nada. Véxanse uns exemplos sinxelos que poden axudar a valorar obxectivamente as opinións que veñen cargadas de datos matemáticos como selo de veracidade.



A escenografía dos exemplos que seguen e as cantidades numéricas están pensadas para non recargar os problemas, salvo no exemplo 117 referido a produción de aceiro da extinta URSS.

117. Cumprimento das promesas.

A produción de aceiro na URSS en 1928 foi de 4200000 toneladas, e o plan quinquenal de Stalin pronosticou que se acadaría unha produción de 10300000 toneladas. A produción real ao remate do último ano foi de 5900000 toneladas, que representa un incremento de 1700000 toneladas e non de 6100000 toneladas, como se planeara.

Trátase de ver a porcentaxe de cumprimento da previsión.

Solución:

O Kremlin, cando publicou os resultados, comparou o nivel obtido co nivel planeado, e así obtivo:

$$\frac{\text{Nivel de produción obtida}}{\text{Nivel de produción planeada}} \cdot 100 = \frac{5900000}{10300000} \cdot 100 = 57.28\% \approx 57.3\%$$

que falazmente daba a entender o que plan quinquenal se cumprira en máis do 57%. O problema da maneira de proceder do Kremlin estriba en que se a produción non aumentara nada, o plan cumprírase nun

$$\frac{4200000}{10300000} \cdot 100 = 40.77\% \approx 40.8\%$$

É máis, aínda que se reducira a produción nun 50% en relación á base de 1928, o plan seguiría cumpríndose —segundo esta maneira de ver as cousas— ata un:

$$\frac{2100000}{10300000} \cdot 100 = 20.38\% \approx 20.4\%$$

A maneira correcta de comparar a produción obtida coa prevista é a seguinte:

$$\frac{\text{Cambio de produción obtida}}{\text{Cambio de produción planeada}} \cdot 100 = \frac{1700000}{6100000} \cdot 100 = 27.868\% \approx 27.9\%$$

co que o plan só se cumpriría en menos dun 28%.

✂ Así vese que cunha falacia matemática pódese progresar indo a peor.

118. Política de persoal.

Dúas persoas, Xoán e Ana preséntanse a unhas probas de selección de persoal para un importante posto de traballo, que constan de 300 preguntas tipo test repartidas en tres bloques de 100 cuestións cada un. Os test teñen que respostarse en dúas sesións dunha hora cada unha. Cada opositor selecciona os bloques que desexa contestar por sesión.

① Na primeira sesión Xoán ten unha taxa de acertos do 30% e Ana do 29%.

② Na segunda sesión Xoán ten unha taxa de acertos do 40% e Ana do 39%.

Así, tanto na primeira como na segunda sesión Xoán tivo mellor taxa de acertos. O promedio de acertos de Xoán é do $\frac{30\% + 40\%}{2} = 35\%$, que é tamén mellor co promedio de acertos de Ana, que é do $\frac{29\% + 39\%}{2} = 34\%$, co que parece que o

posto de traballo debe ser para Xoán. Calquera persoa parece poder defender que o posto de traballo debe ser para Xoán.

Supoñamos que **Ana obtén o contrato**.

É posible que, en conxunto, Ana puidera obter mellores resultados, e sexa xustificado que ela fora a elixida? Hai que pensar que foron outras consideracións as que motivaron que Ana fora a elixida?

Solución:

Con respecto á segunda pregunta, caben tódalas hipóteses, e con respecto á primeira pregunta, a resposta é que si. Supoñamos que se deron as circunstancias seguintes:

Primeira sesión do exame			
Opositor	Nº preg.	% ben	Nº ben
Xoán	200	30%	60
Ana	100	29%	29

Segunda sesión do exame			
Opositor	Nº preg.	% ben	Nº ben
Xoán	100	40%	40
Ana	200	39%	78

Considerando os resultados na súa totalidade, téñense as seguintes porcentaxes:



Xoán: $60 + 40 = 100$ problemas ben de 300 problemas propostos $\rightarrow$ Taxa de éxito: $33.\hat{3}\%$.

Ana: $29 + 78 = 107$ problemas ben de 300 problemas propostos $\rightarrow$ Taxa de éxito: $35.\hat{6}\% \approx 35.7\%$.

Co cal, neste exemplo, é razoable que Ana sexa a elixida para o posto de traballo.

Sen ter datos suficientes é necesario ser moi coidados sacando conclusións, mesmo cando son aparentemente evidentes.

⚠ Hai que decatarse do perigo de facer comparacións de porcentaxes cando non se aplican á mesma cantidade base e nas mesmas circunstancias.

119. Reconversión empresarial.

Un empresario recibe o informe de que os custes de produción e distribución do produto que fabrica subiron no último ano o 12% e que o prezo de venda ó público dese produto só aumentou o 8%.

Debe deducir que os seus beneficios diminuíron nun 4% e, como consecuencia, debe reducir o número de traballadores para equilibrar o balance?

Solución:

Pensar así é frecuente, e en moitos casos un razoamento similar emprégase como escusa para recortes de plantilla. A anterior información, sen máis datos, pode ser unha mentira.

Vexamos un caso. Supoñamos que o custe de produción por unidade é de 1 € e que o prezo de venda é de 2 €.

O incremento do 12% na cifra base do custe de produción fai que o prezo de custe sexa de 1.12 €, mentres que o incremento do 8% no prezo de venda produce un prezo de venda de 2.16 €. Así, os $2 - 1 = 1$ € de beneficio que tiña ao comezo do período base por unidade convértese en $2.16 - 1.12 = 1.04$ €, que representa un 4% de incremento do beneficio e non a suposta perda do 4% que se aducía.

⚠ Como se ve no exemplo, con *datos aparentemente malos pode incrementarse o beneficio*.

120. Interpretación dos resultados: análise da realidade.

No concello ao longo dos dous últimos semestres déronse as seguintes cifras de contratación:

	Primeiro semestre		Segundo semestre	
	Parados	Contratos	Parados	Contratos
Mulleres	830	401	565	236
Homes	170	170	435	401
Total	1000	571	1000	637

As opinións que se verteron nas roldas de prensa foron as seguintes:

Concellal: A política municipal no tema do emprego é boa, xa que no segundo semestre obtivéronse uns resultados un 6.6% **mellores** que no primeiro. O incremento da taxa de emprego foi do $63.7\% - 57.1\% = 6.6\%$.

Alcalde: A política municipal no tema do emprego é **excelente**, xa que no segundo semestre déronse **moito mellores** resultados que no primeiro, nun 11.56%. Vexámolo.

O incremento da taxa de éxito foi do $63.7\% - 57.1\% = 6.6\%$ que produce unha taxa de éxito relativa ¹ de

$$\frac{6.6}{57.1} \cdot 100 = 11.56\%.$$

Sindicato: A política municipal no tema do emprego é **malísima**, xa que no segundo semestre se obtiveron **peores** resultados que no primeiro. En efecto:

As mulleres tiñan no primeiro semestre unha taxa de contratación do $\frac{401}{830} \cdot 100 = 48.31\%$ e no segundo é do

$$\frac{236}{565} \cdot 100 = 41.7699 \approx 41.77\%, \text{ un } 6.54\% \text{ menos.}$$

Para os homes a cousa tamén é peor, pasando dunha taxa de éxito do $\frac{170}{170} \cdot 100 = 100\%$ ao $\frac{401}{435} \cdot 100 = 92.18\%$, un -7.82% .

Quen ten a razón?

Solución:

Todos teñen razón, pero refírense a cousas distintas.

¹ Debemos decatarnos que o feito de pasar do 4% ao 5% —1% de incremento— e o feito de pasar do 75% ao 76% —1% de incremento— teñen unha significación real moi distinta. Por iso é importante falar da *variación relativa*



121. Discursos e promesas de campaña.

Supoñamos un grupo de 20 alumnos que fan un exame no que hai o 60% de aprobados. As notas poden tomar calquera valor numérico entre 0 e 10 e aproban tódolos que teñan unha nota igual ou superior a 5. Fanse as seguintes manifestacións con respecto á nota dun alumno:

- a. Ten unha nota case un 3% superior á media.
- b. Ten unha nota superior ou igual á do 40% dos alumnos.
- c. A súa nota é o 65% da nota máxima.
- d. A súa nota é 3.25 puntos maior ca nota do alumno de nota inmediatamente inferior a el.

Significan algo esas informacións?

Solución:

Sen máis datos **non significan absolutamente nada**, aínda que producen a idea de que tivo unha “boa” nota. Manifestacións similares oímolos moi frecuentemente ós políticos e na publicidade.

Supoñamos que teñen as seguintes notas:

Nº alumnos: a_i	teñen a nota: n_i
12	5
1	3.25
7	0

$$\bar{x} = \frac{\sum a_i \cdot n_i}{\sum a_i} = \frac{63.25}{20} = 3.1625$$

Estudemos o caso do alumno que ten un 3.25 de nota.

Nel coinciden tódalas observacións anteriores, e certamente, á vista dos resultados, parece que as opinións que se poden deducir das súas manifestacións contradín a realidade. Está suspenso e cunha nota bastante baixa. Analicémos as manifestacións e os erros que se producen.

- O primeiro erro é que non especificamos que media se toma. Empregamos a media aritmética (que é a que está na mente de todos), aínda que neste caso non é significativa. Aquí o promedio máis acertado sería a *moda* (5).
Non está aclarada a frase “nota case un 3% superior á media”: o 3% de quen? cal é a base de comparación?:
 - Se consideremos que a media de comparación é a nota media obtida polos alumnos na proba: $\bar{x} = 3.1625$, é dicir: $3.1625 \equiv 100\%$. Entón, con esta hipótese, $3.25 \equiv 102.7668\%$, un 2.7668% maior: á media hai que engadirlle case un 3% para obter a nota dese alumno.
 - Se consideramos que $3.25 \equiv 100\%$, entón $3.1625 \equiv 97.3077\%$, que é aproximadamente un 2.7% : á nota do alumno hai que restarlle case un 2.7% para obter a media. Esta observación é menos “aparente” ca anterior.
- É evidente que ten unha nota superior a 7 alumnos (que é o 35% de 20) e superior ou igual a 8 contándose a si mesmo (o 40% de 20). Debemos decatarnos da variación que produce un caso nun número reducido deles: aquí un alumno equivale ao 5% do total.
- Outra posibilidade de erro: cando di que a nota acada o 65% da nota máxima non aclara cal é a nota máxima á que se refire: pode ser a máxima nota acadable (un 10) ou a máxima nota que acadaron os alumnos (un 5 neste caso). Sen esta matización, é moi fácil que se entenda que acadou un 65% da máxima nota acadable, polo que a súa nota aparenta ser un 6.5. Neste caso, a realidade é que se refire ao 65% da máxima nota acadada: é evidente que 3.25 é o 65% da máxima nota que é 5.

122. Todos melloran os resultados.

Nun concello no que a corporación municipal é de 17 concelleiros preséntanse ás eleccións tres forzas políticas —A, B e C—, que obteñen segundo a Lei D’Hondt os seguintes resultados en dúas convocatorias:

Partido político	Primeiras eleccións			Segundas eleccións			Diferenza de porcentaxe
	Votos	%	Nº Concell.	Votos	%	Nº Concell.	
A	1500	46.15%	8	1605	45.02%	8	−1.13%
B	1000	30.77%	5	1110	31.14%	5	0.37%
C	750	23.08%	4	850	23.84%	4	0.77%
Tot.	3250		17	3565		17	

Como se ve, a representación segue sendo a mesma, e non hai grandes diferenzas no número de votos entre unhas eleccións e outras, tendo un incremento similar cada partido.



Imos ver como tódolos partidos poden estar satisfeitos e considerar que foron os mellor tratados polos electores, facendo as interpretacións “*adequadas*” da situación numérica resultante. Describimos unhas imaxinarias roldas de prensa:

Partido A: É a primeira forza política, o partido político con maior representación, e ademais tivo un importante incremento no número de votos: a terceira parte dos novos electores —un de cada tres novos votantes— elixiu esta opción; ademais o incremento do número de votantes é superior ao do terceiro partido, polo que o partido político **A** incrementa a representatividade dos seus concelleiros en detrimento da oposición, ...

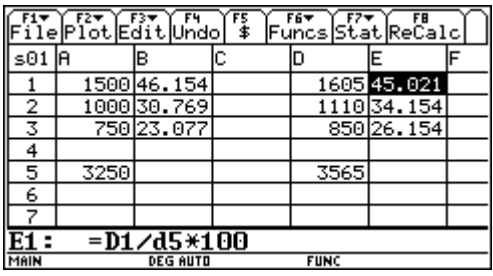
Partido B: Obtivo o maior incremento de votos, en valor absoluto, nestas segundas eleccións, e ese incremento foi superior á media do incremento de tódolos partidos. Reduciuse o diferencial de votos con respecto ao partido maioritario e incrementouse con respecto á terceira forza política, co que aumenta a representatividade dos concelleiros do partido **B** con respecto ás outras forzas políticas, ...

Partido C: É o partido que obtivo un maior incremento porcentual, reduciu a diferenza con respecto ao partido maioritario, tanto en valor absoluto como en porcentaxe; duplicou a porcentaxe de incremento de votos do segundo partido, co que subiu notablemente o peso político dos concelleiros do partido **C** en detrimento das outras forzas políticas, ...

✍ Aos poucos días das eleccións, cando os partidos políticos analizan os resultados, aparecen notas de prensa similares ás descritas, polo que parece evidente a necesidade de estimular o san excecpticismo co que deben recibirse certos datos, informacións ou opinións.

4. USO DE CALCULADORAS E SOFTWARE MATEMÁTICO

Imos utilizar en diversos puntos deste tema as calculadoras da marca Texas Instruments, modelos TI Voyage 200, TI89, TI-89 Titanium e TI-*nspire* CAS.

Usando TI-89, TI-89 Titanium, Voyage 200										Usando TI- <i>nspire</i> CX CAS									
																			

Coas calculadoras indicadas, se se escribe correctamente a expresión, o resultado obtido segue a orde lóxica das operacións, como se ve nas copias de pantalla adxuntas.

Nas copias de pantalla superiores, para TI-89, TI-89 Titanium e Voyage 200, estase utilizando a aplicación flash gratuita de TI «CellSheet»; en TI-*nspire* CX CAS úsase a pantalla «Listas y Hoja de cálculo».



ARITMÉTICA MERCANTIL

1. O VALOR TEMPORAL DO DIÑEIRO

Por que cando se recibe un préstamo hai que devolver máis do que se recibiu prestado?

Por que as entidades de aforro e creto conceden xuros ás contas de aforro dos inversores?

A resposta a estas preguntas e a moitas outras similares radica no *valor temporal do diñeiro*. Hai quen cree, equivocadamente, que un euro vale un euro e que non hai que dicir nada ao respecto. O feito é que, deixando os posibles riscos, os euros pagados e recibidos *en distintos momentos de tempo teñen diferente valor*. Para velo basta con facerse as preguntas:

- Cando é preferible recibir a devolución do imposto sobre a renda das persoas físicas, nada máis efectuar a declaración ou tres meses máis tarde?
- Cando é preferible para o dono que lle paguen o aluguer os inquilinos dun piso, ao comezo ou a final de mes?

1.1. O custo da oportunidade

Só traballando coa intuición, a meirande parte da xente chegaría á acertada conclusión de que preferirían recibir antes os cartos que despois. Por que? Pois porque canto antes se reciba o diñeiro antes se pode utilizar, ben para gastalo ou invertelo en beneficio propio. Se se ten que esperar para recibir o diñeiro cárgase co que os economistas chaman “*custo da oportunidade*”.

✍ O *custo da oportunidade* dunha actividade (neste caso, esperar a recibir o diñeiro) é o valor da oportunidade que se perde de dedicar á mellor actividade posible (neste caso, gastar ou invertir os cartos inmediatamente) os mesmos recursos (neste caso, a suma do diñeiro en cuestión).

Guiándose de novo pola intuición, a meirande parte da xente chega á acertada conclusión de que, se ten que desembolsar unha determinada suma de diñeiro, preferiría pagala o máis tarde posible. Por que? Porque canto máis demore o pago, de máis tempo dispón para utilizar os cartos, gastándoos ou inverténdoos en beneficio propio: se paga inmediatamente carga co custo da oportunidade.

1.2. A función do xuro

Posto que un capital determinado pagadeiro en diferentes momentos de tempo non ten igual valor, é preciso dispoñer dun instrumento que permita comparar os distintos valores. Este instrumento é o xuro.

✍ O *xuro* pode considerarse como o modo de calcular o *custo da oportunidade* en que incorre o que espera para recibir un diñeiro ou o que renuncia a demorar un pago.

Por exemplo, se se depositan 10000 € nunha conta de aforro e se manteñen alí durante un ano, é de supoñer que ao final dese tempo haberá máis de 10000 € na conta. É de supoñer que a conta devengará xuros, xa que se aprazou a utilización deses cartos permitindo que durante ese tempo os empregue o banco. Incurríuse nun custo de oportunidade. O xuro que o banco concede é a compensación que da por ter actuado así.

Supoñamos que alguén recibe un préstamo do seu banco que vence dentro dun ano, momento no que se está obrigado a pagar 6000 €. Se devolve o préstamo hoxe, cun ano de adianto, entenderá que ten dereito a non pagar a totalidade dos 6000 €: dado que renuncia á oportunidade de aprazar a devolución, debería ser compensado coa redución da cantidade a pagar.

1.3. Xuro simple e xuro composto

✍ Hai dúas maneiras de calcular o xuro:

- O *xuro simple* calcúlase aplicando un tipo de xuro só ao capital inicial.
- O *xuro composto* calcúlase aplicando un tipo de xuro á suma do capital inicial máis os xuros que se van acumulando dos períodos de tempo precedentes.



123. Supoñamos que se depositan 10000 € nunha conta que devenga o 6% de xuro simple ao ano. Calcula o capital que se tería ao remate do quinto ano.

Solución:

Ano	Capital €	Xuro €	Saldo final €
1	10000	$\frac{6 \cdot 10000}{100} = 600$	$10000 + 600 = 10600$
2	10000	$\frac{6 \cdot 10000}{100} = 600$	$10600 + 600 = 11200$
3	10000	$\frac{6 \cdot 10000}{100} = 600$	$11200 + 600 = 11800$
4	10000	$\frac{6 \cdot 10000}{100} = 600$	$11800 + 600 = 12400$
5	10000	$\frac{6 \cdot 10000}{100} = 600$	$12400 + 600 = 13000$

124. Supoñamos que se depositan 10000 € nunha conta que devenga o 6% de xuro composto ao ano. Calcula o capital que se tería ao remate do quinto ano.

Solución:

Ano	Capital €	Xuro €	Saldo final €
1	10000	$\frac{6 \cdot 10000}{100} = 600$	$10000 + 600 = 10600$
2	10600	$\frac{6 \cdot 10600}{100} = 636$	$10600 + 636 = 11236$
3	11236	$\frac{6 \cdot 11236}{100} = 674.16$	$11236 + 674.16 = 11910.16$
4	11910.16	$\frac{6 \cdot 11910.16}{100} = 714.61$	$11910 + 714.61 = 12624.77$
5	12624.77	$\frac{6 \cdot 12624.77}{100} = 757.49$	$12624.77 + 757.49 = 13382.26$

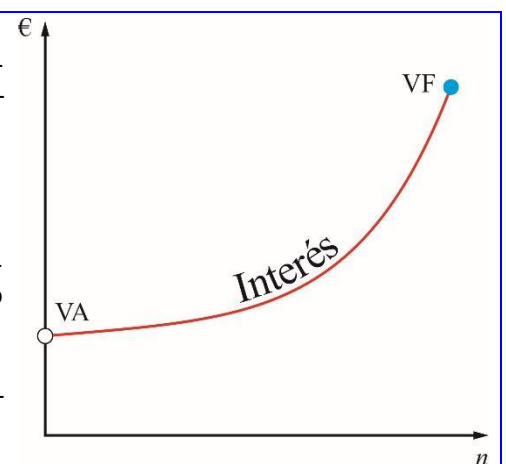
Nota: debe observarse a diferenza de crecemento da conta de xuro simple e a de xuro composto. O saldo aumenta de maneira constante —600 €— anuais no caso xuro simple visto no exemplo 123, e no caso do xuro composto o saldo da conta aumenta cada ano unha cantidade maior, como se ve no exemplo 124.

Na meirande parte das situacións da vida diaria nas que é preciso ter en conta ou calcular o valor temporal dos cartos, o xuro que se aplica é o composto.

1.4. Capitalización e desconto



- Chámase *capitalización* ao proceso polo que o diñeiro de hoxe, chamado *valor actual*, aumenta co transcurso do tempo, para converterse nunha cantidade maior, chamada *valor final*.
- Chámase *desconto* ao proceso polo que un capital pagadeiro no futuro, un *valor final*, se reduce a unha cantidade máis pequena paga-da na actualidade, o seu *valor actual*.
- Na gráfica adxunta vese unha *curva* (e non unha recta) que é a relación entre o valor actual e o valor final, vinculados ambos polo xuro composto.
- A *capitalización* pode entenderse como o movemento de ascenso pola curva, mentres que o *desconto* pode entenderse como un movemento de descenso.





- Os principais factores que determinan a forma da curva anterior son:
 - O número de períodos ao largo dos cales ten lugar a capitalización ou o desconto.
 - O tipo de xuro utilizado no proceso de capitalización ou desconto.

2. VALOR FINAL DUN CAPITAL ÚNICO

A aplicación máis frecuente e fácil de entender do valor temporal do diñeiro é a de calcular o valor final dun capital único. Para determinar o valor final dun capital único hai que levar a cabo a capitalización ou incremento actual a un certo tipo de xuro durante un determinado período de tempo. O exemplo máis habitual é o do crecemento dun capital depositado nunha conta de aforro que devenga xuros, como se fixo no exemplo 124.

- ✍ É importante, tanto teórica como practicamente, notar que en todo problema de valor temporal do diñeiro hai unha transacción, con tempo de por medio, entre saídas e entradas, entre gastos e beneficios.
- Por exemplo, pódese prestar hoxe diñeiro a un amigo (un gasto ou saída de diñeiro no presente) para que este nos devolva máis tarde unha cantidade maior (un beneficio ou maior ingreso de diñeiro no futuro).
 - O exemplo anterior é idéntico ao feito de impoñer un capital nunha entidade bancaria, que despois dun tempo deberá devolvernosa unha cantidade maior.
 - Ou reciprocamente, pedindo un creto a un banco, ao cabo dun determinado tempo temos que devolverlle unha cantidade maior.

2.1. Pago anual de xuros

- ✍ O tanto por cento anual que paga un banco por depositar nel un diñeiro chámase *rédito*.
- Se un banco paga o $r\%$, anual, un capital C durante un ano transfórmase en $C\left(1 + \frac{r}{100}\right)$. Como cada ano o capital se multiplica por $\left(1 + \frac{r}{100}\right)$ ao cabo de n anos transformaras e en:

$$C\left(1 + \frac{r}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) \cdots \left(1 + \frac{r}{100}\right) = C\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n \rightarrow \text{tense a fórmula:}$$

$$C \xrightarrow{n \text{ anos ao } r\% \text{ anual}} C\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n \equiv VA \xrightarrow{n \text{ anos ao } r\% \text{ anual}} VA\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n = VF$$

- Chamando $i = \frac{r}{100}$ ao tipo de xuro anual en forma decimal, a anterior expresión convértese en:
- $$C \xrightarrow{n \text{ anos ao } i \text{ anual}} C(1+i)^n \equiv VA \xrightarrow{n \text{ anos ao } i \text{ anual}} VA(1+i)^n = VF$$

125. Calcula en canto se transformará un capital de 20000 € ao 8% anual en:

- 125.1. 1 ano.
125.2. 4 anos.
125.3. 10 anos.

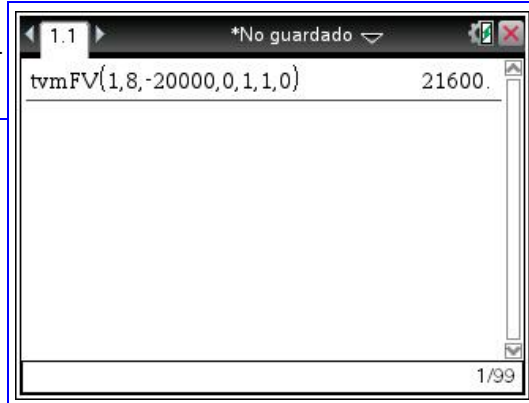
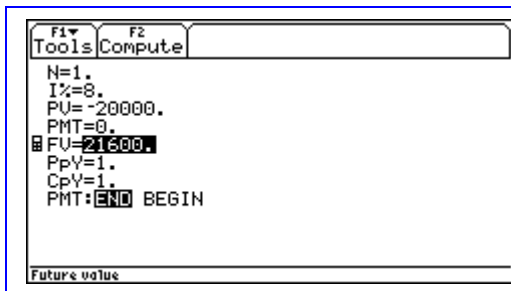
Solución:

O capital, cada ano, multiplícase por $\left(1 + \frac{8}{100}\right) = 1.08$. Polo tanto:

- 125.1. En 1 ano transfórmase en $20000 \cdot 1.08 = 21600$ €.
125.2. En 4 anos transfórmase en $20000 \cdot 1.08^4 = 27209.78$ €.
125.3. En 10 anos transfórmase en $20000 \cdot 1.08^{10} = 43178.50$ €.



En TI-89 Titanium e Voyage 200 usamos a aplicación Finance; en TI-nspire CAS usamos a función $\text{tvmFV}(N, I, PV, \text{Pmt}, \text{PpY}, \text{CpY}, \text{PmtAt})$.



O valor de PV é negativo porque representa o desembolso que hai que facer.

N	Representa o número de períodos de pago.
I ou I%	Representa a taxa de xuro anual.
PV	Representa o valor presente.
Pmt	Representa a cantidade do pago.
FV	Representa o valor futuro.
PpY	Indica o número de pagos por ano. Por defecto é 1.
CpY	Indica o número de períodos compostos por ano. Por defecto é 1.
PMT ou PmtAt	Indica se o pago se fai ao final do período (0) ou ao comezo (1).

126. En canto se transforma un capital de 50000 €, colocado ao 12% anual, en 1, 2, 3, 4 e 5 anos?

Solución:

Nun ano transfórmase en: $50000 \cdot 1.12 = 56000 \text{ €}$.

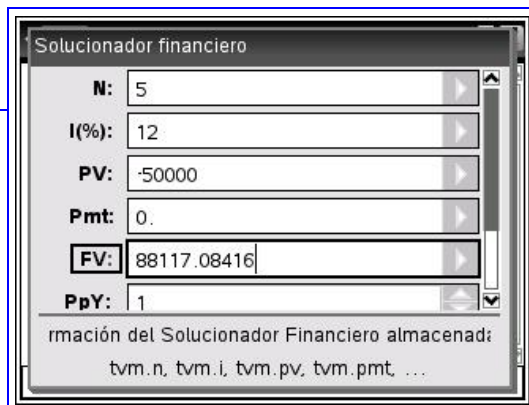
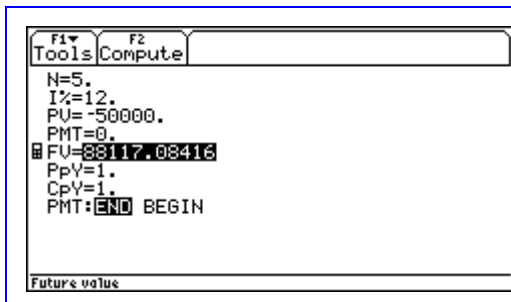
En dous anos transfórmase en: $50000 \cdot 1.12^2 = 62720 \text{ €}$.

En tres anos transfórmase en: $50000 \cdot 1.12^3 = 70246.4 \text{ €}$.

En catro anos transfórmase en: $50000 \cdot 1.12^4 = 78675.968 \text{ €}$.

En cinco anos transfórmase en: $50000 \cdot 1.12^5 = 88117.08 \text{ €}$.

En TI-89 e V 200 usamos a aplicación Finance; en TI-nspire CX CAS usamos a opción “Solucionador financeiro” do menú “Finanzas”.



127. Cantos anos se necesitan para que se dupliquen 50000 € colocados ao 12% anual?

Solución:

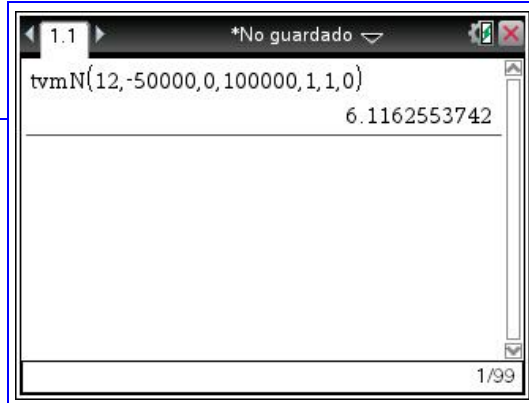
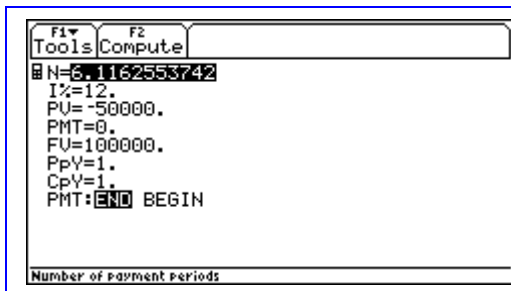
Cada ano o capital ten un incremento do 12% → cada ano o capital multiplícase por 1.12. Polo tanto temos a ecuación

$$50000 \cdot 1.12^x = 100000 \rightarrow 1.12^x = 2 \rightarrow x = \frac{\log(2)}{\log(1.12)} = 6.116255 \dots \rightarrow \text{fan falta aproximadamente 7 anos ata que se dupli-}$$

que: $50000 \cdot 1.12^7 = 110534.07 \text{ €}$.



En TI-89 Titanium e Voyage 200 usamos a aplicación Finance; en TI-nspire CAS úsase a función $\text{tvmN}(1, \text{PV}, \text{Pmt}, \text{FV}, \text{PpY}, \text{CpY}, \text{PmtAt})$.

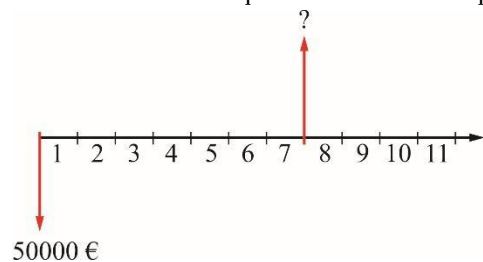


En TI-nspire CAS tamén poderíamos usar a ou usamos a opción “Resolver” do menú “Finanzas”. Os valores que interveñen son os indicados na táboa da páxina 38.

128. Supoñamos que hoxe se depositan nun banco 50000 € nunha conta que produce o 9% de xuro anual. En que cantidade se converterá ao final do sétimo ano?

Solución:

Representamos o problema na alínea temporal da figura seguinte. Esta alínea temporal representa o problema de que se depositen hoxe 50000 € e que se desexa calcular o valor final dese depósito ao acabar o ano sete. A alínea temporal serve tamén para ilustrar a transacción que hai na base de calquera problema de valor temporal do diñeiro.



Aquí a transacción dáse entre unha saída actual do diñeiro (o depósito, representado por debaixo da alínea) e unha entrada futura de diñeiro (o saldo da conta ao final do sétimo ano, representada por enriba da alínea).

Os valores actuais representaranse sempre por debaixo da alínea, ao igual cas saídas periódicas de diñeiro; os valores finais e as entradas de diñeiro representaranse por riba da alínea.

$$VF = VA(1+i)^n = 50000(1+0.09)^7 = 50000 \cdot 1.828039 = 91401.956 \text{ €}.$$

2.2. Pago mensual de xuros

Frecuentemente, o banco non tarda un ano en aboar os xuros, senón que o fai en intervalos de tempo distintos (semestre, trimestre, mes, ...).

- O tempo que o banco deixa transcorrer para que un capital produza xuros chámase *período de capitalización*.
- Un $r\%$ anual significa un $\frac{r}{12}\%$ mensual. Se un capital C se deposita nun banco ao $r\%$ anual con pago mensual de xuros (período de capitalización dun mes), cada mes multiplícase por $1 + \frac{r}{1200}$ e, por tanto, ao cabo de m meses transformarase en:

$$C \left(1 + \frac{r}{1200}\right) \cdot \left(1 + \frac{r}{1200}\right) \cdots \left(1 + \frac{r}{1200}\right) = C \left(1 + \frac{r}{1200}\right)^m \rightarrow \text{tense a fórmula:}$$

$$C \xrightarrow{\text{m meses ao } r\% \text{ anual}} C \left(1 + \frac{r}{1200}\right)^m$$

2.3. Pago diario de xuros

Un $r\%$ anual significa un $\frac{r}{365}\%$ diario. Se os períodos de capitalización son días, por cada un que transcorra o capital multiplícase por $1 + \frac{r}{36500}$. Polo tanto, tense a fórmula:

$$C \xrightarrow{\text{n días ao } r\% \text{ anual}} C \left(1 + \frac{r}{36500}\right)^n$$



- Se os bancos utilizan o ano de 360 días, e non de 365, as consideracións antes feitas hai que matizalas para ese caso:

$$C \xrightarrow{n \text{ días ao } r\% \text{ anual}} C \left(1 + \frac{r}{36000} \right)^n$$

129. Recibimos un préstamo de 50000 € ao 12% anual que debemos devolver, xunto cos seus xuros, nun único pago 3 anos despois. Indica a canto ascenderá o pago, se os períodos de capitalización fosen:

129.1. Anos.

129.2. Meses.

129.3. Días.

Solución:

129.1. $50000 \xrightarrow{3 \text{ anos ao } 12\% \text{ anual}} 50000 \left(1 + \frac{12}{100} \right)^3 = 70246.4 \text{ €}.$

O pago será de 70246.4 €.

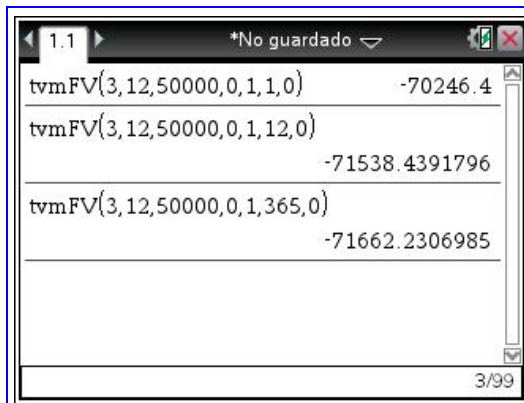
129.2. Se os períodos de capitalización son meses, o capital multiplicarase cada mes por $1 + \frac{12}{1200} = 1.01$.

Polo tanto, o pago final dos 3 anos ($3 \cdot 12 = 36$ meses) será:

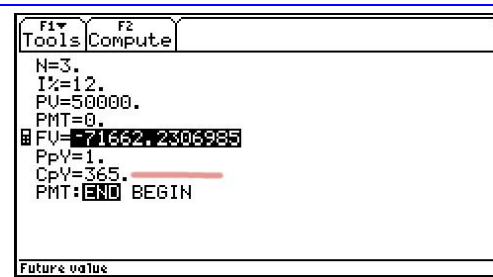
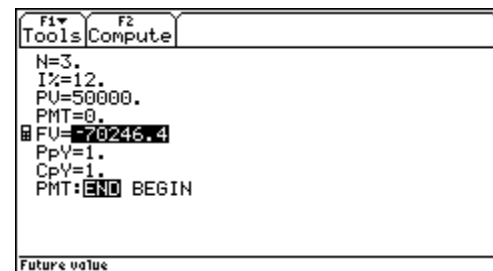
$$50000 \cdot 1.01^{36} = 71538.44 \text{ €}.$$

129.3. Se os períodos de capitalización son días, o capital multiplicarase cada día por $1 + \frac{12}{36500} = 1.00032877$.

Polo tanto, o pago final dos 3 anos ($3 \cdot 365 = 1095$ días) será: $50000 \cdot 1.00032877^{1095} = 71662.46 \text{ €}.$



Nas copias de pantalla adxuntas vese a resolución deste exemplo utilizando as calculadoras TI que empregamos neste tema.



130. Calcula en canto se transforma un capital de 100000 € ao 6% anual durante 4 anos se os períodos de capitalización son:

130.1. anos.

130.2. meses.

130.3. días.

130.4. trimestres.

Solución:

130.1. $100000 \xrightarrow{4 \text{ anos ao } 6\% \text{ anual}} 100000 \left(1 + \frac{6}{100} \right)^4 = 126247.696 \text{ €}.$

130.2. $100000 \xrightarrow[4 \cdot 12 = 48 \text{ meses}]{48 \text{ meses ao } 6\% \text{ anual}} 100000 \left(1 + \frac{6}{1200} \right)^{48} = 127048.92 \text{ €}.$



$$130.3. 100000 \xrightarrow[4 \cdot 365 = 1460 \text{ días}]{1460 \text{ días ao } 6\% \text{ anual}} 100000 \left(1 + \frac{6}{36500}\right)^{1460} = 127122.41\text{€}.$$

$$130.4. 100000 \xrightarrow[4 \cdot 4 = 16 \text{ trimestres}]{16 \text{ trimestres ao } 6\% \text{ anual}} 100000 \left(1 + \frac{6}{400}\right)^{16} = 126898.55\text{€}.$$

3. TAE: TAXA ANUAL EQUIVALENTE



Cando os períodos de capitalización son inferiores ao ano (ou como mínimo distintos), os xuros anuais producidos por un certo capital son distintos ao rédito declarado. Neste caso é necesario buscar unha referencia anual.

- Chámase *taxa anual equivalente* (TAE) ao tanto por cento de crecemento total do capital durante un ano.
- Nos préstamos bancarios, a TAE é superior ao rédito declarado. Ao calculala inclúense os pagos fixos (comisións e gastos) que cobra o banco para conceder o préstamo.

131. Un banco fai a seguinte oferta:

«Se se deposita o seu diñeiro na nosa CONTA DEPÓSITO, dámoslle uns xuros anuais do 12% con pago mensual de xuros (TAE do 12.68%)». Averigua se esa é a TAE adecuada.

Solución:

Ao 12% anual correspóndelle un 1% mensual. Como cada mes se pagan os xuros, nun mes o capital aumenta un $\frac{12\%}{12} = 1\% \rightarrow$
 $\rightarrow C \xrightarrow{1 \text{ mes}} C \cdot 1.01$ polo que nun ano (12 meses), o capital transformárase en: $C \xrightarrow{12 \text{ meses}} C \cdot 1.01^{12} = 1.1268 C$, polo que nun ano o capital aumentou un 12.68%, xa que $1.1268 = 1 + \frac{12.68}{100}$.

Polo tanto, un 12% anual, con períodos de capitalización mensuais, convértese nun aumento real do 12.68% : esa é a TAE (*taxa anual equivalente*).

132. Un banco concédenos un préstamo de 10000 € ao 12% anual. No momento da formalización cóbranos uns gastos de 500 €. Realizamos un só pago ao cabo dun ano, tomando períodos de capitalización mensuais, cal é a TAE?

Solución:

Hai que ter en conta que, realmente, o banco prestounos 9500 €, dado que cobrou 500 € pola formalización do mesmo. Por ter períodos de capitalización mensual, entón por 10000 € temos que devolver:

$$1 + \frac{12\%}{12} = 1.01; 1.01^{12} = 1.126825 \dots \rightarrow \text{hai que devolver } 10000 \cdot 1.126825 = 11268.25 \text{ €}.$$

Como nos deron 9500 € e temos que devolver 11268.25 €, a TAE que nos aplicaron durante un ano foi a seguinte:

$$9500 \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 11268.25 \rightarrow r = \left(\frac{11268.25}{9500} - 1\right) \cdot 100 = 18.613\%, \text{ é dicir, pagamos unha TAE do } 18.613\%.$$

133. Calcula a TAE correspondente a un rédito anual do 8% con pagos mensuais de xuros.

Solución:

Ao 8% anual correspóndelle un $\frac{8}{12} = 0.666666\%$ mensual. Cada mes o capital multiplícase por 1.00666666. Nun ano multiplícarase por $1.00666666^{12} = 1.0829995068 \dots \approx 1.083 = 1 + \frac{8.3}{100}$. A TAE correspondente a un 8% anual con períodos de capitalización mensuais, é, por tanto, do 8.3%.



4. AMORTIZACIÓN DE PRÉSTAMOS

134. Un banco concédenos un préstamo de 10000 € que debemos amortizar nun ano mediante 12 pagos mensuais idénticos. O banco di que cobra un interese do 12% anual e fixa unha mensualidade de 888.49 euros. É correcta esta formulación?

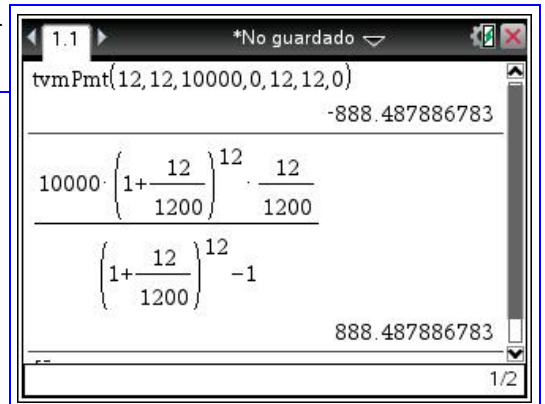
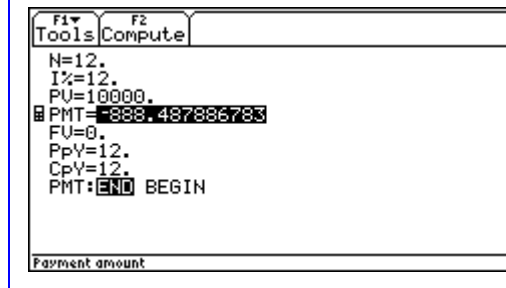
Solución:

Máis adiante veremos como se calcula a mensualidade. Aquí fíxose coa aplicación «Finance» e coa función $\text{tvmPmt}(N, I, PV, FV, PpY, CpY, PmtAt)$.

A fórmula que se usa é a seguinte para obter a mensualidade é a seguinte:

$$m = C \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}$$

onde $i = \frac{r}{1200}$.



O resultado negativo de $-888.487886783 \approx -888.49$ débese a que é unha cantidade que hai que temos que pagar. O significado dos parámetros son os da táboa da páxina 38.

- A primeira mensualidade pagarase un mes despois de recibir o préstamo. Durante ese mes dispuxemos de 10000 euros do banco. Para calcular os xuros correspondentes ao primeiro mes teremos en conta que a un 12% anual lle corresponde un 1% mensual:

$$1\% \text{ de } 1000 = 100\text{€}$$

Como pagamos 888.49 €, a cantidade amortizada mediante o primeiro pago é:

$$888.49 - 100 = 788.49\text{€}$$

Polo tanto, despois do primeiro pago, a débeda pendente co banco é:

$$10000 - 788.49 = 9211.51\text{€}.$$

- Segunda mensualidade.
Xuros pola débeda pendente: $1\% \text{ de } 9211.51 = 92.12\text{€}$.
Cantidade amortizada: $888.49 - 92.12 = 796.37\text{€}$.
Débeda pendente: $9211.51 - 796.37 = 8415.14\text{€}$.
- Táboa resumo cos 12 pagos:

Mensualidade	Débeda antes do pago	Xuros pagados	Pago	Cantidade amortizada	Débeda pendente
1	10000.00	$\frac{10000.00 \cdot 1}{100} = 100.00$	888.49	$888.49 - 100.00 = 788.49$	$10000.00 - 788.49 = 9211.51$
2	9211.51	$\frac{9211.51 \cdot 1}{100} \approx 92.12$	888.49	$888.49 - 92.12 = 796.37$	$9211.51 - 796.37 = 8415.14$
3	8415.14	84.15	888.49	804.34	7610.80
4	7610.80	76.11	888.49	812.38	6798.41
5	6798.41	67.98	888.49	820.51	5977.91
6	5977.91	59.78	888.49	828.71	5149.20
7	5149.20	51.49	888.49	837.00	4312.20
8	4312.20	43.12	888.49	845.37	3466.83
9	3466.83	34.67	888.49	853.82	2613.01
10	2613.01	26.13	888.49	862.36	1750.65
11	1750.65	17.51	888.49	870.98	879.67
12	879.67	8.80	888.49	879.69	-0.03

Con cada pago de 888.49 € abóanse os xuros que se deben polo capital pendente e amortízase parte da débeda. Utilizado todos os decimais que se obteñen da calculadora, para mellor ver os resultados, para as cantidades amortizadas verifícase o seguinte:



$$\frac{10000 \cdot 1}{100} = 100 \rightarrow \text{a } 1^{\text{a}} \text{ cantidade amortizada é de } 888.48788678323 - 100 = 788.48788678323 \text{ €}.$$

$$788.48788678323 \cdot \left(1 + \frac{12}{1200}\right) = 796.372765651$$

$$788.48788678323 \cdot \left(1 + \frac{12}{1200}\right)^2 = 804.33649330$$

$$788.48788678323 \cdot \left(1 + \frac{12}{1200}\right)^3 = 812.37985824$$

.....

$$796.37276565106 \cdot \left(1 + \frac{12}{1200}\right) = 804.33649330$$

$$804.336493308 \cdot \left(1 + \frac{12}{1200}\right) = 812.37985824$$

...

✍ O importe das cantidades amortizadas periódicamente son capitalizacións das cantidades amortizadas previamente.

Como cada vez a débeda é menor, os xuros son menores e a cantidade amortizada é maior.

A última débeda pendente debería ser 0. A cantidade insignificante de -3 céntimos de euro débese aos redondeos efectuados.

Polo tanto, a mensualidade fixada polo banco é acorde co rédito (12%) pactado.

✍ Para a *amortización dun préstamo* mediante varios pagos aprazados, tense en conta que:

- Cada pago salda os xuros que produce a débeda pendente desde o pago anterior e, o resto, amortiza parte desa débeda.
- O último pago salda os xuros pendentes desde o pago anterior e amortiza a totalidade da débeda pendente.
- O habitual é que todos os pagos sexan idénticos. O cálculo desa cantidade fixa (mensualidade, anualidade) que permite amortizar o total da débeda nun número prefixado de prazos vese no apartado 6, na páxina 51.

135. Recíbese un préstamo de 20000 €, ao 15% anual, que hai que amortizar en 5 pagos anuais idénticos. Verifica que a anualidade correspondente é de 5966.31€.

Solución:

Mensualidade	Débeda antes do pago	Xuros pagados	Pago	Cantidade amortizada	Débeda pendente
1	20000	3000	5966.31	2966.31	17033.69
2	17033.69	2555.05	5966.31	3411.26	13622.43
3	13622.43	2043.37	5966.31	3922.94	9699.49
4	9699.49	1454.92	5966.31	4511.39	5188.10
5	5188.10	778.22	5966.31	5188.09	0.01

Neste caso, cada pago (anualidade) serve para saldar os xuros (15% da débeda pendente) e para amortizar parte da débeda.

136. Recíbese un préstamo de 50000 €, ao 10% anual, e hai que amortizalo en 4 pagos anuais. Os tres primeiros son de 15000 €. A canto ascenderá o cuarto pago?

Solución:

Mensualidade	Débeda antes do pago	Xuros pagados	Pago	Cantidade amortizada	Débeda pendente
1	50000	5000	15000	10000	40000
2	40000	4000	15000	11000	29000
3	29000	2900	15000	12100	16900
4	16900	1690	x	16900	0

O cuarto pago é igual á débeda pendente, 16900 €, máis o 10% polos xuros.

$$x = 16900 + 1690 = 18590 \text{ euros}$$

137. Comproba que podemos amortizar 10000 € ao 10% anual mediante catro pagos trimestrais de 2658.18 € cada un.

Solución:

$$10\% \text{ anual} = \frac{10}{4} = 2.5\% \text{ trimestral.}$$



Mensualidade	Débeda antes do pago	Xuros pagados	Pago	Cantidade amortizada	Débeda pendente
1	10000	250	2658.18	2408.18	7591.82
2	7591.82	189.80	2658.18	2468.38	5123.44
3	5123.44	128.09	2658.18	2530.09	2593.34
4	2593.34	64.83	2658.18	2593.35	-0.01

The image shows the TI-nspire CAS interface. On the left, the menu path is: 8: Finanzas > 3: Amortización. The main window displays the function $\text{amortTbl}(4, 4, \frac{10}{4}, 10000)$ and the resulting table:

0	0.	0.	10000.
1	-250.	-2408.18	7591.82
2	-189.8	-2468.38	5123.44
3	-128.09	-2530.09	2593.35
4	-64.83	-2593.35	0.

138. Comproba que podemos amortizar un préstamo de 500000 € ao 6% anual con 8 pagos mensuais de 63914.43€.

Solución:

$$6\% \text{ anual} = \frac{6}{12} = 0.5\% \text{ mensual}$$

Mensualidade	Débeda antes do pago	Xuros pagados	Pago	Cantidade amortizada	Débeda pendente
1	500000.00	2500	63914.43	61414.43	438585.57
2	438585.57	2192.93	63914.43	61721.50	376864.07
3	376864.07	1884.32	63914.43	62030.11	314833.96
4	314833.96	1574.17	63914.43	62340.26	252493.70
5	252493.70	1262.47	63914.43	62651.96	189841.74
6	189841.74	949.21	63914.43	62965.22	126876.52
7	126876.52	634.38	63914.43	63280.05	63596.47
8	63596.47	317.98	63914.43	63596.45	0.02

The image shows the TI-nspire CAS interface. The left window displays the function $\text{amortTbl}(8, 8, \frac{6}{12}, 500000, -63914.43)$ and the resulting table:

0	0.	0.	500000.
1	-2500.	-61414.43	438585.57
2	-2192.93	-61721.5	376864.07
3	-1884.32	-62030.11	314833.96
4	-1574.17	-62340.26	252493.7
5	-1262.47	-62651.96	189841.74
6	-949.21	-62965.22	126876.52
7	-634.38	-63280.05	63596.47
8	-317.98	-63596.45	0.02

TI-nspire CAS permite obter unha táboa de amortizacións como a descrita anteriormente coa función $\text{amortTbl}(\text{NPmt}, \text{N}, \text{i}, \text{PV}, [\text{Pmt}], [\text{VF}], [\text{PpY}], [\text{CpY}], [\text{PmtAt}], [\text{redondValor}])$, e xera unha matriz como a que se viu nas imaxes anteriores.

NPmt Representa o número de pagos que se queren incluír na táboa. A táboa iníciase co primeiro pago.

redondValor Especifica o número de decimais de redondeo. O valor predeterminado é 2.



- Se se omite o valor de Pmt a función $amortTbl$ aplica de forma predeterminada a función $Pmt = tvmpmt(N, I, PV, FV, PpY, CpY, PmtAt)$ utilizada no exemplo 42 da páxina 42.
- Se se omite o valor de FV aplícase de forma predeterminada $FV = 0$.
- O significado dos parámetros PpY , CpY e $PmtAt$ e os seus valores predeterminados poden verse na táboa da páxina 38.
- As columnas da matriz de resultados teñen o seguinte orden: Número de pago, interés pagado, principal amortizado e principal que resta por pagar.
- O principal que resta por pagar no número de pago n corresponde ao principal que resta por pagar tras o pago n .

5. REPASO DE PROGRESIONES XEOMÉTRICAS

5.1. Sucesións

☞ Chámase *sucesión* a un conxunto de valores dados ordenadamente, de xeito que se poidan numerar: primeiro, segundo, terceiro, ...

- Os elementos da sucesión chámanse *termos* e adóitanse designar mediante unha letra cos subíndices correspondentes aos lugares que ocupan na sucesión:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

Por exemplo, 1, 5, 9, 13, 17, ... é unha sucesión. Nela, $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 9$, $a_4 = 13$, $a_5 = 17$, ...

- A sucesión $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ denótase, en xeral, das seguintes formas: $\{a_n\}$, a_n , (a_n)

Nas sucesións que manexamos habitualmente existe algún criterio que permite obter os sucesivos termos.

- Na sucesión 1, 5, 9, 13, 17, ... cada termo, a partir do segundo, obtense sumando 4 ao anterior.
- Na sucesión de Fibonacci, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... cada termo, a partir do terceiro, obtense sumando os dous anteriores.

5.1.1. Termo xeral

Ás veces podemos encontrar unha expresión que sirva para obter un termo calquera dunha sucesión con só saber o lugar que ocupa.

☞ Chámase *termo xeral* dunha sucesión, e simbolízase con a_n , ao termo que representa a un calquera dela.

- Hai sucesións nas que o termo xeral pode expresarse mediante unha fórmula, $a_n = f(n)$. Dándolle a n un certo valor natural, obtense o termo correspondente.

139. Para a sucesión 1, 5, 9, 13, 17, ... encontramos a expresión $a_n = 4n - 3$, pois dándolle a n os valores 1, 2, 3, 4, 5, ... obtemos os termos $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$. $a_n = 4n - 3$ é o *termo xeral* desa sucesión.

☞ As sucesións nas que os termos se obteñen operando dous ou máis termos anteriores chámanse *recorrentes*.

- Nas sucesións recorrentes frecuentemente é complexo obter o termo xeral. Se este non se coñece, para calcular un termo hai que obter, previamente, todos os anteriores.

140. Un exemplo de sucesión recorrente é a sucesión de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ..., na que cada termo, a partir do terceiro, se obtén sumando os dous anteriores: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$, e o seu termo xeral ven dado pola fórmula:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

141. Sexa a sucesión 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

141.1. Descubre o criterio con que se forma e engádelle dous termos.

141.2. Indica o seu termo xeral.

Solución:

141.1. O termo é o cadrado do lugar que ocupa: $a_7 = 49$, $a_8 = 64$.

141.2. $a_n = n^2$.



142. Sexa a sucesión 1, 3, 4, 7, 11, 18, ...

142.1. Descubre o criterio con que se forma e engádelle dous termos.

142.2. Indica o seu termo xeral.

Solución:

142.1. Cada termo, a partir do terceiro, obtense sumando os dous anteriores: $a_7 = 29$, $a_8 = 47$.

142.2. É recorrente; cada termo, a partir do segundo, obtense sumando os dous anteriores.

143. Sexa a sucesión 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

143.1. Descubre o criterio con que se forma e engádelle dous termos.

143.2. Indica o seu termo xeral.

Solución:

143.1. Cada termo, a partir do segundo, obtense multiplicando por 2 o anterior: $a_7 = 128$, $a_8 = 256$.

143.2. $a_n = 2^n$.

144. Sexa a sucesión 1, -3, 9, -27, 81, ...

144.1. Descubre o criterio con que se forma e engádelle dous termos.

144.2. Indica o seu termo xeral.

Solución:

144.1. Cada termo, a partir do segundo, obtense multiplicando por -3 o anterior: $a_6 = -243$, $a_7 = 729$.

144.2. $a_n = (-3)^{n-1}$.

145. Sexa a sucesión 2, 4, 6, 10, 16, 26, ...

145.1. Descubre o criterio con que se forma e engádelle dous termos.

145.2. Indica o seu termo xeral.

Solución:

145.1. Cada termo, a partir do terceiro, obtense sumando os dous anteriores: $a_7 = 42$, $a_8 = 68$.

145.2. É recorrente, e os termos obtéñense, a partir do segundo, sumando os dous anteriores.

5.2. Progresións xeométricas



Chámase *progresión xeométrica* a unha sucesión de números $a_1, a_2, \dots, a_n$ —que se chaman *termos da progresión*— tal que cada termo seguinte se obtén do anterior multiplicándoo por un número determinado r , chamado *razón* da progresión.

$$a_{k+1} = a_k \cdot r \leftrightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} = r$$

- O termo xeral, a_n , dunha progresión xeométrica que ten como primeiro termo a_1 e como razón r obtense así:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

- Se $r > 1$ a progresión é *crecente* e se $|r| < 1$, é *decrecente*.
- Se $r = 1$ a progresión é *constante*.
- Se $r < 0$ os termos consecutivos da progresión son de signos opostos, polo que a progresión recibe o nome de *alternada*.
- Se $r = 0$ os termos da progresión son nulos (agás a_1).

- Chámase *progresión xeométrica limitada* a unha parte da progresión xeométrica formada por n termos (usualmente os n primeiros termos):

$$\{a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \dots, a_{k+n}\}$$



146. Pon un exemplo de progresión xeométrica.

Solución:

$$3, 6, 12, 24, \dots \rightarrow a_1 = 3, r = 2, a_n = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

147. Pon un exemplo de progresión xeométrica.

Solución:

$$18, 6, 2, \frac{2}{3}, \dots \rightarrow b_1 = 18, r = \frac{1}{3}, a_n = 18 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

✍ Para comprobar se unha sucesión $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ é unha progresión xeométrica, divídense cada dous termos consecutivos:

$$\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \frac{a_4}{a_3}, \frac{a_5}{a_4}, \dots$$

e compróbase se os cocientes coinciden:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_5}{a_4} = \dots?$$

148. Indica se a sucesión $32, 16, 8, 4, 2, \dots$ é unha progresión xeométrica, escribe tres termos máis e obtén o termo xeral.

Solución:

Comprobamos que $\frac{16}{32} = \frac{8}{16} = \frac{4}{8} = \frac{2}{4} = r = \frac{1}{2}$, polo que é unha progresión xeométrica con $a_1 = 32$ e $r = \frac{1}{2}$; $a_6 = 1$, $a_7 = \frac{1}{2}$,

$$a_8 = \frac{1}{4}; a_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 64 \cdot 2^{-n} = 2^{6-n}.$$

5.2.1. Algunhas propiedades das progresións xeométricas

- ✍ Nunha progresión xeométrica o produto dos termos equidistantes dos extremos é igual o produto dos extremos:
 $a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = \dots$
- Se a progresión xeométrica limitada ten un número impar de termos, entón o produto dos extremos é igual ao cadrado do *termo central*. É dicir, se a_c é o termo central, entón:

$$a_1 \cdot a_n = a_c^2$$

- O produto dos n primeiros termos consecutivos dunha progresión xeométrica limitada é:

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

- O produto de n termos consecutivos dunha progresión xeométrica limitada é igual á raíz cadrada do produto dos extremos elevado ao número de termos:

$$P_n = \sqrt{(a_{k+1} \cdot a_{k+n})^n}$$

5.2.2. Fórmulas das progresións xeométricas

- ✍ $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ —Termo xeral a partir do primeiro e da razón.
- $a_n = a_m \cdot r^{n-m}$, $n > m$ —Termo xeral a partir do m -ésimo e da razón.



- $S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a_{n+1} - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1 - r} = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$ — Suma dos n primeiros termos con $r \neq 1$, en varias formas.

En efecto, tendo en conta que $a_2 = a_1 \cdot r$, $a_3 = a_2 \cdot r$, $a_4 = a_3 \cdot r$, ... tense:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ r \cdot S_n &= a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_n \cdot r \\ r \cdot S_n - S_n &= -a_1 + a_n \cdot r \\ \rightarrow S_n(r - 1) &= a_n \cdot r - a_1 \rightarrow S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{\overbrace{a_1 \cdot r^{n-1}}^{a_n} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}. \end{aligned}$$

- Cando $|r| < 1$, a fórmula anterior convén poñela así:

$$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r} = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r - 1}$$

- A suma dos infinitos termos dunha progresión xeométrica na que $|r| < 1$ é:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$$

En efecto: o sumando $a_n r$ faise tanto máis pequeno canto maior sexa n e se n é moi grande, $a_n r$ é practicamente cero.

149. Indica se a sucesión 1, 4, 9, 16, 25, ... é unha progresión xeométrica, e escribe tres termos máis e indica o termo xeral.

Solución:

$$\frac{9}{4} \neq \frac{4}{1} \rightarrow \text{non é unha progresión xeométrica; } a_6 = 36, a_7 = 49, a_8 = 64; a_n = n^2.$$

150. Indica se a sucesión 1, 0.1, 0.01, 0.001, ... é unha progresión xeométrica, escribe tres termos máis e indica o termo xeral.

Solución:

$$\text{Comprobamos que } \frac{0.001}{0.01} = \frac{0.01}{0.1} = \frac{0.1}{1} = 0.1 \rightarrow \text{é unha progresión xeométrica con } a_1 = 1 \text{ e } r = 0.1; a_5 = 0.0001,$$

$$a_6 = 0.00001, a_7 = 0.000001; a_n = 1 \cdot (0.1)^{n-1} = 10 \cdot (0.1)^n.$$

151. Indica se a sucesión $90, -30, 10, -\frac{10}{3}, \frac{10}{9}, \dots$ é unha progresión xeométrica e, de selo, indica a razón e engade dous elementos máis.

Solución:

$$-\frac{30}{90} = \frac{10}{-30} = \frac{-\frac{10}{3}}{10} = \dots \rightarrow \text{é unha progresión xeométrica con } a_1 = 90, r = -\frac{1}{3}, a_6 = -\frac{10}{27}, a_7 = \frac{10}{81},$$

$$a_n = -270 \cdot 3^{-n} \cdot (-1)^n.$$

152. Calcula a suma dos 10 primeiros termos da progresión 1, 3, 9, 27, 81, ...

Solución:

$$1, 3, 9, 27, 81, \dots \rightarrow a_1 = 1, r = 3; a_{10} = a_1 \cdot r^9 = 1 \cdot 3^9 = 10683; S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{19683 \cdot 3 - 1}{3 - 1} = 29524.$$

153. Calcula a suma dos 10 primeiros termos da progresión 100, 50, 25, 12.5, ...

Solución:

$$100, 50, 25, 12.5, \dots \rightarrow a_1 = 100, r = \frac{1}{2} \rightarrow a_{10} = a_1 \cdot r^9 = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{25}{128}, S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{\frac{25}{128} \cdot \frac{1}{2} - 100}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{25575}{128} \cong$$

$$\cong 199.8046.$$



154. Calcula a suma dos 25 primeiros termos da progresión xeométrica $a_1 = 2^{-10}$, $r = 2$ e calcula a suma dos infinitos termos, no caso de que sexa posible.

Solución:

$$a_1 = 2^{-10}, r = 2: S_{25} = \frac{2^{-10} \cdot 2^{25} - 2^{-10}}{2 - 1} = 32767.9990234 \cong 32768; S_{\infty} = +\infty.$$

155. Calcula a suma dos 10 primeiros termos da progresión $5, -5, 5, -5, 5, -5, \dots$

Solución:

$$5, -5, 5, -5, 5, -5, \dots \rightarrow a_1 = 5, r = -1 \rightarrow a_{10} = -5; S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{-5 \cdot (-1) - 5}{-1 - 1} = \frac{0}{-2} = 0.$$

156. A maquinaria dunha fábrica perde cada ano un 20% do seu valor. Se custou 4 millóns de euros, en canto se valorará despois de 10 anos de funcionamento?

Solución:

— Ao cabo do 1º ano valerá: $a_1 = (4 \cdot 10^6) \cdot 0.8 \text{ €}.$

— Ao cabo do 2º ano valerá: $a_2 = (4 \cdot 10^6) \cdot 0.8^2 \text{ €}.$

— Ao cabo do 3º ano valerá: $a_3 = (4 \cdot 10^6) \cdot 0.8^3 \text{ €}.$

...

— Ao cabo do 10º ano valerá: $a_{10} = (4 \cdot 10^6) \cdot 0.8^{10} \text{ €} = 429496.7296 \text{ €}.$

157. Calcula a suma dos infinitos termos da progresión $100, 50, 25, 12.5, \dots$

Solución:

$$100, 50, 25, 12.5, \dots \rightarrow a_1 = 100, |r| = \left| \frac{1}{2} \right| < 1 \rightarrow S_{\infty} = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{100}{1 - \frac{1}{2}} = 200.$$

158. O 1 de xaneiro depositamos 5000 € nunha conta bancaria a un interese anual de 6% co pago mensual de xuros. Cal será o valor do noso diñeiro un ano despois?

Solución:

Un 6% anual corresponde a $\frac{6}{1200} = 0.005$ mensual. Cada mes o diñeiro multiplícase por 1.005.

— Ao cabo do 1º mes teremos: $a_1 = 5000 \cdot 1.005 \text{ €}.$

— Ao cabo do 2º mes teremos: $a_2 = 5000 \cdot 1.005^2 \text{ €}.$

...

— Ao cabo do 12º mes teremos: $a_{12} = 5000 \cdot 1.005^{12} \text{ €} = 5308.389 \dots \text{ €} = 5308.39 \text{ €}.$

159. Supoñendo que unha suma colocada a xuro composto se duplicara cada 15 anos, calcula o valor en 2015 dunha unidade monetaria colocada no ano 1625.

Solución:

$2015 - 1625 = 390$; $390 \div 15 = 26$. En consecuencia, de 1625 a 2015 hai 26 períodos de 15 anos; a suma transformouse sucesivamente en 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,

O termo 27 desta progresión é: $a_{27} = 2^{26} = 67108864.$



160. Durante 5 anos depositamos nun banco 2000 € o 4% con pago anual de xuros:

160.1. En canto se converte cada depósito ó final do quinto ano?

160.2. Que cantidade de diñeiro acumulamos durante eses 5 anos?

Solución:

160.1. Ao final do 5º ano:

- Os primeiros 2000 € convértense en $2000 \cdot 1.04^5 \text{ €} = 2433.3058 \text{ €} \cong 2433.31 \text{ €}$.
- Os segundos 2000 € convértense en $2000 \cdot 1.04^4 \text{ €} = 2339.717 \text{ €} \cong 2339.72 \text{ €}$.
- Os terceiros 2000 € convértense en $2000 \cdot 1.04^3 \text{ €} = 2249.728 \text{ €} \cong 2249.73 \text{ €}$.
- Os cuartos 2000 € convértense en $2000 \cdot 1.04^2 \text{ €} = 2163.2 \text{ €}$.
- Os quintos 2000 € convértense en $2000 \cdot 1.04 \text{ €} = 2080 \text{ €}$.

160.2. Sumamos as cantidades anteriores:

$$2000 \cdot 1.04^5 + 2000 \cdot 1.04^4 + 2000 \cdot 1.04^3 + 2000 \cdot 1.04^2 + 2000 \cdot 1.04 = 2000(1.04^5 + 1.04^4 + 1.04^3 + 1.04^2 + 1.04) \stackrel{(*)}{=} \\ \stackrel{(*)}{=} 2000 \frac{1.04^5 \cdot 1.04 - 1.04}{1.04 - 1} = 11265.95 \text{ €}.$$

(*) Suma dos termos dunha progresión xeométrica con $a_1 = 1.04$ e $r = 1.04$.

161. O 1 de xaneiro depositamos 1000 € nunha conta bancaria a un interese anual do 12% con pago mensual de xuros. Cal será o valor do noso diñeiro o día un de cada mes dese ano?

Solución:

Cada mes o diñeiro multiplícase por $1 + \frac{12}{1200} = 1.01$. Ao comezo do primeiro mes hai $a_1 = 1000$. En diante:

$$a_2 = 1000 \cdot 1.01, a_3 = 1000 \cdot 1.01^2, \dots, a_{12} = 1000 \cdot 1.01^{11}.$$

Trátase dunha progresión xeométrica de 12 termos e razón 1.01.

162. Durante 5 anos, cada ano depositamos 2000 euros ao 4%, con pago anual de xuros ¿en canto se converte cada depósito ao final do 5º ano?

Solución:

O primeiro depósito está 5 anos ao 4%. Transfórmase en $s_1 = 2000 \cdot 1.04^5$. Os seguintes:

$$a_2 = 2000 \cdot 1.04^4, a_3 = 2000 \cdot 1.04^3, a_4 = 2000 \cdot 1.04^2, a_5 = 2000 \cdot 1.04.$$

É unha progresión xeométrica de 5 termos e razón $\frac{1}{1.04}$.

163. Depositamos 100000 euros o día 1 de xaneiro nun banco ao 8% anual. Que valor teñen ao final de cada trimestre do ano? Estas cantidades están en progresión xeométrica. Cal é a razón?

Solución:

$$8\% \text{ anual} = \frac{8\%}{4} = 2\% \text{ trimestral}.$$

Ao final do primeiro trimestre vale $100000 \cdot 1.02 = 102000 \text{ €}$. Ao final do segundo trimestre vale $100000 \cdot 1.02^2 = 104040 \text{ €}$.

Ao final do terceiro trimestre vale $100000 \cdot 1.02^3 = 106120.8 \text{ €}$. Ao final do cuarto trimestre vale $100000 \cdot 1.02^4 = 108243.22 \text{ €}$.

A razón é $r = 1.02$.

164. No exemplo 162 calculamos canto diñeiro se acumula por cada ingreso, ao final do 5º ano tralos 5 ingresos de 2000 € ao comezo de cada ano. Calcula o total empregando progresións xeométricas.

Solución:

As cantidades finais eran: $a_1 = 2000 \cdot 1.04^5, a_2 = 2000 \cdot 1.04^4, \dots, a_5 = 2000 \cdot 1.04$.

Posto que é unha progresión xeométrica decrecente, resúltanos máis cómodo manexala se “lle damos a volta”:

$$b_1 = 2000 \cdot 1.04, b_2 = 2000 \cdot 1.04^2, \dots, b_5 = 2000 \cdot 1.04^5 \quad (r = 1.04).$$

A súa suma é:

$$S_5 = \frac{b_5 \cdot 1.04 - b_1}{1.04 - 1} = \frac{2000 \cdot 1.04^6 - 2000 \cdot 1.04}{0.04} = 11265.95 \text{ €}.$$



165. No exemplo 134 viuse que pagando mensuralidades de 888.49 € durante 12 meses se amortizaba un préstamo de 10000 € ao 12% anual (1% mensual). Compróboao empregando progresións xeométricas.

Solución:

Canto vale cada un dos pagos doce meses despois de recibido o préstamo?

1º pago $\xrightarrow{11 \text{ meses}}$ $888.49 \cdot 1.01^{11}$, 2º pago $\xrightarrow{10 \text{ meses}}$ $888.49 \cdot 1.01^{10}$, 3º pago $\xrightarrow{9 \text{ meses}}$ $888.49 \cdot 1.01^9$, ...,

11º pago $\xrightarrow{1 \text{ meses}}$ $888.49 \cdot 1.01$, 12º pago $\xrightarrow{0 \text{ meses}}$ 888.49 .

“Dándolle a volta” a estes valores obtemos unha progresión xeométrica de razón 1.01: $a_1 = 888.49$, $a_2 = 888.49 \cdot 1.01$, ..., $a_{12} = 888.49 \cdot 1.01^{11}$

A suma é:

$$S_{12} = \frac{888.49 \cdot 1.01^{11} \cdot 1.01 - 888.49}{1.01 - 1} = 888.49 \frac{1.01^{12} - 1}{0.01} = 11268.28 \text{ €}.$$

Canto valen 10000 € doce meses despois de recibidos?

$$10000 \cdot 1.01^{12} = 11268.25 \text{ €}$$

As dúas cantidades son, en efecto, practicamente iguais (só difiren en 3 céntimos).

6. CÁLCULOS PARA AMORTIZACIÓN DE DÉBEDAS OU ACUMULACIÓN DE CAPITALS

A meirande parte da poboación subscibe un creto para mercar un produto ou un servizo, que vai amortizando en cotas periódicas: a hipoteca da vivenda, os prazos do coche, etcétera. Estes cotas ou prazos abónanse ao *remate* do período.

Outras persoas impoñen periodicamente, ao *comezo* do período, unha cantidade para nun futuro ter un capital determinado.

6.1. Amortización dunha débeda mediante pagos periódicos iguais (amortización)

166. Recibimos un préstamo de 20000 euros, cun tipo de interese do 12% anual e temos que devolvemo en catro anos mediante catro pagos iguais. Cal será o valor da anualidade?

Solución:

Razoemos *qué valor terán dentro de 4 anos* tanto o capital recibido hoxe, 20000, como as catro anualidades — a — que pagaremos en anos sucesivos

$$\begin{array}{l} 20000 \xrightarrow{\text{en 4 anos ao 12\% anual}} 20000 \cdot 1.12^4 = 31470.3872 \text{ €} \\ \left. \begin{array}{l} a \xrightarrow{\text{en 3 anos}} a \cdot 1.12^3 \\ a \xrightarrow{\text{en 2 anos}} a \cdot 1.12^2 \\ a \xrightarrow{\text{en 1 ano}} a \cdot 1.12 \\ a \end{array} \right\} \text{cantidade total pagada} \end{array}$$

O total pagado consta de catro sumandos en progresión xeométrica de razón 1.12:

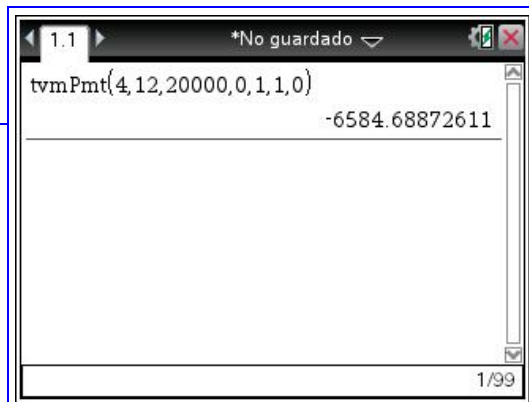
$$a(1 + 1.12 + 1.12^2 + 1.12^3) = a \cdot \frac{1.12^4 - 1}{1.12 - 1} = 4.779328 \cdot a$$

Polo tanto, para que o diñeiro recibido sexa igual ao pagado, debe ser:

$$4.779328 \cdot a = 31470.39$$

De aquí obtense o valor da anualidade $a = 6584.68872611 \approx 6584.69 \text{ €}$.

Úsase a aplicación «Finance» e a función financeira $\text{tvmPmt}(N, I, PV, FV, PpY, CpY, PmtAt)$, tendo os parámetros o significado que se ve na páxina 38.





167. Estuda a amortización de 20000 € ao 12% anual, en catro anos, mediante 48 mensualidades iguais.

Solución:

Procedemos como antes. Agora consideramos 48 períodos de capitalización dun mes. O 12% anual significa o 1% mensual.

$$\begin{array}{l}
 20000 \xrightarrow{\text{en 48 meses ao 1\% mensual}} 20000 \cdot 1.01^{48} = 32244.5215537 \text{ €} \\
 \left. \begin{array}{l}
 m \xrightarrow{\text{en 47 meses}} m \cdot 1.01^{47} \\
 m \xrightarrow{\text{en 46 meses}} m \cdot 1.01^{46} \\
 \dots\dots\dots \\
 m \xrightarrow{\text{en 2 meses}} m \cdot 1.01^2 \\
 m \xrightarrow{\text{en 1 mes}} m \cdot 1.01 \\
 m
 \end{array} \right\} \text{Cantidade total pagada.}
 \end{array}$$

O total pagado está en progresión xeométrica de razón 1.01:

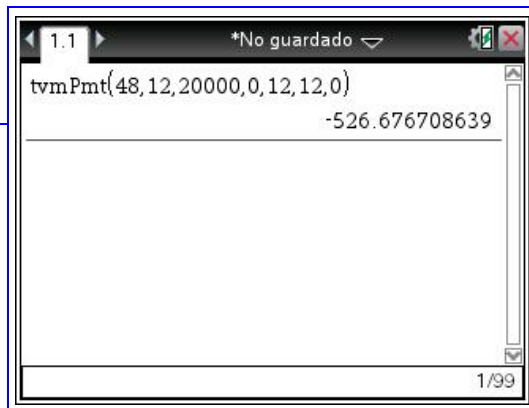
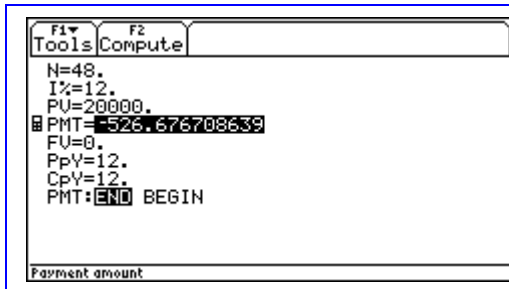
$$m \cdot (1 + 1.01 + 1.01^2 + \dots + 1.01^{47}) = m \cdot \frac{1.01^{48} - 1}{1.01 - 1} = 61.2226077683 \cdot m$$

Polo tanto, para que o diñeiro recibido sexa igual ao pagado, debe ser:

$$61.22260776825 \cdot m = 32244.52155365$$

De aquí obtense o valor da mensuralidade: $m = 5.26.676708639 \approx 526.68 \text{ €}$.

Coa aplicación «Finance» e a función financeira $\text{tvmPmt}(N, I, PV, FV, PpY, CpY, PmtAt)$, tendo os parámetros o significado que se ve na páxina 38.



6.2. Obtención da fórmula da cantidade periódica para amortizar un préstamo



O problema que se nos plantea é:

- Un préstamo, C , ten que ser devolto mediante n anualidades de valor a . Se o rédito é do $r\%$ anual, como se obtén o valor da anualidade a coñecendo o capital C , o número de períodos de amortización n e o rédito r ?

Para resolvelo chamamos $i = \frac{r}{100}$. Calculemos o valor que terá o capital, C , e cada unha das n anualidades no momento en que se paga a última delas e, polo tanto, se amortiza o crédito:

$$\begin{array}{l}
 C \xrightarrow{\text{en } n \text{ anos}} C(1+i)^n \\
 \left. \begin{array}{l}
 a \xrightarrow{\text{en } n-1 \text{ anos}} a(1+i)^{n-1} \\
 a \xrightarrow{\text{en } n-2 \text{ anos}} a(1+i)^{n-2} \\
 \dots\dots\dots \\
 a \xrightarrow{\text{en 1 ano}} a(1+i) \\
 a
 \end{array} \right\} \text{Cantidade total pagada valorada ao final do ano } n\text{-ésimo.}
 \end{array}$$

Os valores das n anualidades forman unha progresión xeométrica, da que o primeiro termo é a e a razón é $1+i$. A suma da devandita progresión xeométrica é:

$$a + a(1+i) + \dots + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1} = \frac{a(1+i)^{n-1}(1+i) - a}{1+i-1} = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$



A suma do diñeiro pagado ten que ser igual ao diñeiro recibido. Como os pagos se realizan en distintos momentos, referímolos todo ao final do ano n -ésimo:

$$C(1+i)^n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Despexando obtense:

$$a = C \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}$$

✎ Dado un préstamo, C , que ten que ser devolto mediante n anualidades de valor a . Sendo o rédito do $r\%$ anual, a anualidade que hai que pagar para amortizar o préstamo é:

$$a = C \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}, \quad i = \frac{r}{100}$$

- A anterior fórmula é válida tamén cando os pagos se realizan en períodos non anuais modificando o significado de i e de n .
Por exemplo, para amortizar unha débeda mediante pagos mensuais, o valor de cada mensualidade obtense coa fórmula anterior, na cal:

$$i = \frac{r}{1200} \text{ e } n = \text{número de mensualidades}$$

- *Mensualidade para amortizar un préstamo, C , a un interese anual do $r\%$ anual, mediante n pagos mensuais. A mensualidade correspondente obtense mediante a seguinte fórmula:*

$$m = C \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}, \text{ onde } i = \frac{r}{1200}$$

- Este método de amortización é coñecido como “*método Francés*”, e é o que se utiliza máis frecuentemente para a amortización de hipotecas, cretos ao consumo, etcétera.

168. Un empresario solicita un préstamo de 500000 euros. Concédennlo a un interese fixo do 11% anual, debéndoo pagar en 8 anualidades. De canto será cada anualidade?

Solución:

$$a = 500000 \cdot \frac{1.11^8 \cdot 0.11}{1.11^8 - 1} = 500000 \cdot 0.1943321 = 97160.53 \text{ €}.$$

Solución: a anualidade é de 97160.53€.

169. Un banco concede un préstamo de 10000 euros ao 12% anual que debemos amortizar en un ano mediante 12 pagos mensuais. Comproba que, tal como se utilizou na páxina 42, a mensualidade correspondente é de 888.49 euros.

Solución:

$$m = 10000 \cdot \frac{1.01^{12} \cdot 0.01}{1.01^{12} - 1} = 888.49 \text{ €}.$$

Solución: a mensualidade é de 888.49 €.

170. Deséxase amortizar unha débeda de 70000 euros, en 3 anos, ao 10% anual, mediante pagos trimestrais. Canto haberá que pagar cada trimestre?

Solución:

O interese trimestral é: $\frac{10\%}{4} = 2.5\%$. Polo tanto, $i = \frac{2.5}{100} = 0.025$.

O número de pagos é: $n = 3 \cdot 4 = 12$.

O valor de cada pago é: $p = 70000 \cdot \frac{(1+0.025)^{12} \cdot 0.025}{(1+0.025)^{12} - 1} = 6824.10 \text{ €}.$

Solución: o valor de cada pago trimestral é de 6824.10 €.



171. Calcula a mensualidade que hai que pagar para amortizar en 3 anos unha débeda de 24000 euros ao 9% anual.

Solución:

3 anos $\rightarrow$ 36 meses.

$$i = \frac{9}{1200} = 0.0075 \rightarrow m = 24000 \cdot \frac{1.0075^{36} \cdot 0.0075}{1.0075^{36} - 1} = 763.19358€$$

Solución: a mensualidade é de 763.19358€.

172. Recibimos un préstamo de 20000 €, ao 12% e debemos devolvelo en catro anos, pagando cada ano os xuros da cantidade adebada máis a cuarta parte do capital. Cales serán os pagos anuais?

Solución:

	Capital pendiente	Pago de xuros	+	Pago de capital	=	Pago anual	Débeda pendiente
1º ano	20000	$20000 \cdot 0.12$	+	5000	=	7400	15000
2º ano	15000	$15000 \cdot 0.12$	+	5000	=	6800	10000
3º ano	10000	$10000 \cdot 0.12$	+	5000	=	6200	5000
4º ano	5000	$5000 \cdot 0.12$	+	5000	=	5600	0

Os pagos serán, nos sucesivos anos, de 7400 €, 6800 €, 6200 € e 5600 €.

173. Canto hai que pagar trimestralmente para amortizar en 3 anos unha débeda de 24000 € ao 9% anual?

Solución:

$$i = \frac{9}{400} = 0.0225 \rightarrow m = 24000 \cdot \frac{1.0225^{12} \cdot 0.0225}{1.0225^{12} - 1} = 2304.4176 \approx 2304.42 €$$

Solución: cada trimestre hai que pagar uns 2304.42 €.

174. Un empresario solicita un crédito de 2 millóns de euros ao 15% para o seu negocio, que ten que devolver en 10 anos. Calcula:

174.1. A anualidade que ten que pagar se o pago é ao final de cada ano.

174.2. A mensualidade que tería que pagar se tivese que facelo mensualmente.

Solución:

I. Resolvemos o problema razoando paso a paso:

174.1. Cantidade que ten que devolver: $2000000 \cdot (1.15)^{10} = 8091115.5 €$.

Se a é a anualidade, o total pagado será:

$$a \cdot 1.15^9 + a \cdot 1.15^8 + \dots + a \cdot 1.15 + a = a \cdot \frac{1.15^{10} - 1}{1.15 - 1} = 20.3037 \cdot a.$$

Igualando: $20.3037 \cdot a = 8091115.5 \rightarrow a = 398504.5 €$

174.2. Neste caso so 120 períodos de capitalización dun mes ao $\frac{15\%}{12} = 1.25\%$ mensual.

Cantidade que debe devolver: $2000000 \cdot (1.0125)^{120} = 8880426.5 €$.

Se m é a mensualidade, en total pagou:

$$m \cdot 1.0125^{119} + m \cdot 1.0125^{118} + \dots + m \cdot 1.0125 + m = m \cdot \frac{1.0125^{120} - 1}{1.0125 - 1} = 257.217 \cdot m.$$

Igualando: $257.217 \cdot m = 8880426.5 \rightarrow m = 32267 €$.

II. Resolvemos o problema utilizando as fórmulas de cálculo de anualidades e mensuralidades:

$$174.1. a = C \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \left(i = \frac{15}{100}, n = 10 \right); a = 2000000 \cdot \frac{1.15^{10} \cdot 0.15}{1.15^{10} - 1} = 398504.13 €.$$

$$174.2. m = C \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \left(i = \frac{15}{1200}, n = 120 \right); m = 2000000 \cdot \frac{1.0125^{120} \cdot 0.0125}{1.0125^{120} - 1} = 32267 €.$$



175. Recíbese un préstamo de 10000 € ao 12% anual que hai que pagar nun ano con prazos mensuais. O banco cobra 350 € pola xestión do préstamo no momento da súa concesión. Comproba que a TAE correspondente a ese préstamo é dun 16.77%.

Solución:

O banco cobra 10000 € ao 1% mensual, pero o que realmente se recibe é 9650 €, que ao $r\%$ anual ($r = \text{TAE}$) será igual ao que o banco cobra; hai que obter o valor de r .

12% anual $\rightarrow \frac{12\%}{12} = 1\%$ mensual. Na realidade recíbese un préstamo de $10000 - 350 = 9650$ € e devólvense

$10000 \cdot 1.01^{12} = 11268.25$ €: é dicir, recíbense 9650 € e devólvense 11268.25 €, polo que o incremento porcentual foi do:

$$9650 + \frac{9650 \cdot x}{100} = 11268.25 \rightarrow x = \frac{11268.25 - 9650}{9650} \cdot 100 = 16.769\% \rightarrow \text{a TAE é do } 16.769\% \approx 16.77\%.$$

176. Pídese un creto de 6000 € para amortizar nun ano, cun tipo de xuro nominal do 5.4% anual e con pagos mensuais.

176.1. Calcula a cota mensual.

176.2. Fai a táboa de amortizacións.

Solución:

176.1. A cota mensual obtense da fórmula $m = C \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}$, onde $i = \frac{r}{1200}$:

$$i = \frac{5.4}{1200} = 0.0045 \rightarrow m = 6000 \frac{(1+0.0045)^{12} \cdot 12}{(1+0.0045)^{12} - 1} = 514.745379721 \text{ €}.$$

176.2. A táboa de amortizacións, redondeando a cota a $m = 514.7454$ € é:

Nº p	%	Débeda	Xuros	Cota	Amortizado	Pendente
1	5.40	6000.00	27.00	514.7454	487.75	5512.25
2	5.40	5512.25	24.81	514.7454	489.94	5022.31
3	5.40	5022.31	22.60	514.7454	492.14	4530.17
4	5.40	4530.17	20.39	514.7454	494.36	4035.81
5	5.40	4035.81	18.16	514.7454	496.58	3539.23
6	5.40	3539.23	15.93	514.7454	498.82	3040.41
7	5.40	3040.41	13.68	514.7454	501.06	2539.34
8	5.40	2539.34	11.43	514.7454	503.32	2036.02
9	5.40	2036.02	9.16	514.7454	505.58	1530.44
10	5.40	1530.44	6.89	514.7454	507.86	1022.58
11	5.40	1022.58	4.60	514.7454	510.14	512.44
12	5.40	512.44	2.31	514.7454	512.44	0.00

Usando a función `amortTbl(NPmt,N,I,PV,[Pmt],[FV],[PpY],[CpY],[PmtAt],[redondValor])` de TI-nspire CAS, obtense a táboa de amortización en forma de matriz.

NPmt é o número de pagos que se queren incluír na táboa; redondValor especifica o número de decimais de redondeo; por defecto é 2.

Os demais argumentos son os que se ven na táboa da páxina 38.

A carón vense os primeiros 6 movementos da táboa de amortización; para velos todos teríamos que facer un desprazamento pola pantalla.

Hai que lembrar que as columnas da matriz de resultados teñen o seguinte orden: número de pago, interés pagado, principal amortizado e principal que resta por pagar.

6.3. Amortización dun creto, con xuro variable

O tempo para a amortización de cretos usualmente excede a un ano, acadando os 30 ou máis anos para o casos dos cretos hipotecarios subscritos para a compra de vivendas. Durante ese período é frecuente que cambie o tipo de xuro que se aplica.



Cando varía o tipo de xuro anual que se aplica hai que recalcular a cota periódica que se paga (usualmente a mensuralidade) considerando o novo tipo de xuro e o capital pendente de amortización; o novo tempo é o número de prazos que quedaban para rematar a anterior amortización.

En moitos casos o recálculo da cota faise anualmente, e tamén se fai semestralmente, trimestralmente, e mesmo mensualmente. Estas opcións figuran no contrato do creto.

Tamén é frecuente que o estudio do creto e a formalización do contrato conlevaran uns gastos importante, que hai que ter en conta á hora de calcular a TAE.

177. Pídese un creto de 50000 €, a amortizar nun ano, mediante pagos mensuais iguais. O xuro é variable, con axuste bimensual do tipo. O xuro de partida é do 4.25%. Fai a táboa de amortización deste creto, sabendo que o tipo de xuro foi subindo cada dous meses nun cuarto de punto.

Solución:

$$i_1 = \frac{4.25}{1200} = 0.003541\bar{6} \approx 0.003542; i_2 = \frac{4.50}{1200} = 0.00375;$$

$$i_3 = \frac{4.75}{1200} = 0.003958\bar{3} \approx 0.003958; i_4 = \frac{5}{1200} = 0.0041\bar{6} \approx 0.004167;$$

$$i_5 = \frac{5.25}{1200} = 0.004375; i_6 = \frac{5.50}{1200} = 0.00458\bar{3} \approx 0.004583.$$

Nº p	%	Débeda	Xuros	Cota	Amortizado	Pendente	Cálculo da cota en cada variación do %
1	4.25	50000.00	177.08	4263.21	4086.13	45913.87	$m_1 = 50000 \cdot \frac{(1+0.003542)^{12} \cdot 0.003542}{(1+0.003542)^{12} - 1} \approx 4263.21$
2	4.25	45913.87	162.61	4263.21	4100.60	41813.27	
3	4.50	41813.27	156.80	4268.05	4111.25	37702.02	$m_2 = 41813.27 \cdot \frac{(1+0.00375)^{10} \cdot 0.00375}{(1+0.00375)^{10} - 1} \approx 4268.05$
4	4.50	37702.02	141.38	4268.05	4126.67	33575.35	
5	4.75	33575.35	132.90	4272.02	4139.12	29436.23	$m_3 = 33575.35 \cdot \frac{(1+0.003958)^8 \cdot 0.003958}{(1+0.003958)^8 - 1} \approx 4272.02$
6	4.75	29436.23	116.52	4272.02	4155.50	25280.73	
7	5.00	25280.73	105.34	4275.11	4169.77	21110.96	$m_4 = 25280.73 \cdot \frac{(1+0.004167)^6 \cdot 0.004167}{(1+0.004167)^6 - 1} \approx 4275.11$
8	5.00	21110.96	87.96	4275.11	4187.15	16923.81	
9	5.25	16923.81	74.04	4277.33	4203.29	12720.52	$m_5 = 16923.81 \cdot \frac{(1+0.004375)^4 \cdot 0.004375}{(1+0.004375)^4 - 1} \approx 4277.33$
10	5.25	12720.52	55.65	4277.33	4221.68	8498.84	
11	5.50	8498.84	38.95	4278.66	4239.71	4259.13	$m_6 = 8498.84 \cdot \frac{(1+0.004583)^2 \cdot 0.004583}{(1+0.004583)^2 - 1} \approx 4278.66$
12	5.50	4259.13	19.52	4278.66	4259.14	-0.01	

✶ É conveniente fixarse na forma en que afecta a modificación da cota o mesmo incremento da taxa de xuro, segundo nos atopemos preto do comezo da amortización (páganse moitos xuros e amortízase pouco) ou preto do remate (xa queda pendente de amortizar pouca cantidade). Nese sentido, este exemplo é pouco significativo, dado que hai poucas cotas. Estas observacións axudan a matizar as informacións que aparecen na prensa cando se modifican os tipos de xuro de referencia que toman como base as entidades financeiras.

178. Fai a táboa de amortización dun creto hipotecario de 120000 €, con cotas mensuais, que se amortizará en 10 anos, a xuro variable, comezando co tipo de xuro nun 4.41% e incrementándose anualmente nun cuarto de punto.

Solución:

Poñemos a táboa de amortización seguinte, onde os cálculos se fan de xeito similar ao exemplo 177. É interesante comprobar como afectan as modificacións do tipo de xuro cando se está ao comezo do creto e ao remate.



Nº p	%	Débeda	Xuros	cota	Amortizado	Pendente
1	4.41	120000.00	441.00	1238.46	797.46	119202.54
2	4.41	119202.54	438.07	1238.46	800.39	118402.15
3	4.41	118402.15	435.13	1238.46	803.33	117598.82
4	4.41	117598.82	432.18	1238.46	806.28	116792.54
5	4.41	116792.54	429.21	1238.46	809.25	115983.29
6	4.41	115983.29	426.24	1238.46	812.22	115171.07
7	4.41	115171.07	423.25	1238.46	815.21	114355.86
8	4.41	114355.86	420.26	1238.46	818.20	113537.66
9	4.41	113537.66	417.25	1238.46	821.21	112716.45
10	4.41	112716.45	414.23	1238.46	824.23	111892.22
11	4.41	111892.22	411.20	1238.46	827.26	111064.96
12	4.41	111064.96	408.16	1238.46	830.30	110234.66
13	4.66	110234.66	428.08	1251.6	823.52	109411.14
14	4.66	109411.14	424.88	1251.6	826.72	108584.42
15	4.66	108584.42	421.67	1251.6	829.93	107754.49
16	4.66	107754.49	418.45	1251.6	833.15	106921.34
17	4.66	106921.34	415.21	1251.6	836.39	106084.95
18	4.66	106084.95	411.96	1251.6	839.64	105245.31
19	4.66	105245.31	408.70	1251.6	842.90	104402.41
20	4.66	104402.41	405.43	1251.6	846.17	103556.24
21	4.66	103556.24	402.14	1251.6	849.46	102706.78
22	4.66	102706.78	398.84	1251.6	852.76	101854.02
23	4.66	101854.02	395.53	1251.6	856.07	100997.95
24	4.66	100997.95	392.21	1251.6	859.39	100138.56
25	4.91	100138.56	409.73	1263.46	853.73	99284.83
26	4.91	99284.83	406.24	1263.46	857.22	98427.61
27	4.91	98427.61	402.73	1263.46	860.73	97566.88
28	4.91	97566.88	399.21	1263.46	864.25	96702.63
29	4.91	96702.63	395.67	1263.46	867.79	95834.84
30	4.91	95834.84	392.12	1263.46	871.34	94963.50
31	4.91	94963.50	388.56	1263.46	874.90	94088.60
32	4.91	94088.60	384.98	1263.46	878.48	93210.12
33	4.91	93210.12	381.38	1263.46	882.08	92328.04
34	4.91	92328.04	377.78	1263.46	885.68	91442.36
35	4.91	91442.36	374.15	1263.46	889.31	90553.05
36	4.91	90553.05	370.51	1263.46	892.95	89660.10
37	5.16	89660.10	385.54	1274	888.46	88771.64
38	5.16	88771.64	381.72	1274	892.28	87879.36
39	5.16	87879.36	377.88	1274	896.12	86983.24
40	5.16	86983.24	374.03	1274	899.97	86083.27
41	5.16	86083.27	370.16	1274	903.84	85179.43
42	5.16	85179.43	366.27	1274	907.73	84271.70
43	5.16	84271.70	362.37	1274	911.63	83360.07
44	5.16	83360.07	358.45	1274	915.55	82444.52
45	5.16	82444.52	354.51	1274	919.49	81525.03
46	5.16	81525.03	350.56	1274	923.44	80601.59
47	5.16	80601.59	346.59	1274	927.41	79674.18
48	5.16	79674.18	342.60	1274	931.40	78742.78
49	5.41	78742.78	355.00	1283.18	928.18	77814.60
50	5.41	77814.60	350.81	1283.18	932.37	76882.23
51	5.41	76882.23	346.61	1283.18	936.57	75945.66
52	5.41	75945.66	342.39	1283.18	940.79	75004.87
53	5.41	75004.87	338.15	1283.18	945.03	74059.84
54	5.41	74059.84	333.89	1283.18	949.29	73110.55
55	5.41	73110.55	329.61	1283.18	953.57	72156.98
56	5.41	72156.98	325.31	1283.18	957.87	71199.11
57	5.41	71199.11	320.99	1283.18	962.19	70236.92
58	5.41	70236.92	316.65	1283.18	966.53	69270.39
59	5.41	69270.39	312.29	1283.18	970.89	68299.50
60	5.41	68299.50	307.92	1283.18	975.26	67324.24

Nº p	%	Débeda	Xuros	cota	Amortizado	Pendente
61	5.66	67324.24	317.55	1290.95	973.40	66350.84
62	5.66	66350.84	312.95	1290.95	978.00	65372.84
63	5.66	65372.84	308.34	1290.95	982.61	64390.23
64	5.66	64390.23	303.71	1290.95	987.24	63402.99
65	5.66	63402.99	299.05	1290.95	991.90	62411.09
66	5.66	62411.09	294.37	1290.95	996.58	61414.51
67	5.66	61414.51	289.67	1290.95	1001.28	60413.23
68	5.66	60413.23	284.95	1290.95	1006.00	59407.23
69	5.66	59407.23	280.20	1290.95	1010.75	58396.48
70	5.66	58396.48	275.44	1290.95	1015.51	57380.97
71	5.66	57380.97	270.65	1290.95	1020.30	56360.67
72	5.66	56360.67	265.83	1290.95	1025.12	55335.55
73	5.91	55335.55	272.53	1297.27	1024.74	54310.81
74	5.91	54310.81	267.48	1297.27	1029.79	53281.02
75	5.91	53281.02	262.41	1297.27	1034.86	52246.16
76	5.91	52246.16	257.31	1297.27	1039.96	51206.20
77	5.91	51206.20	252.19	1297.27	1045.08	50161.12
78	5.91	50161.12	247.04	1297.27	1050.23	49110.89
79	5.91	49110.89	241.87	1297.27	1055.40	48055.49
80	5.91	48055.49	236.67	1297.27	1060.60	46994.89
81	5.91	46994.89	231.45	1297.27	1065.82	45929.07
82	5.91	45929.07	226.20	1297.27	1071.07	44858.00
83	5.91	44858.00	220.93	1297.27	1076.34	43781.66
84	5.91	43781.66	215.62	1297.27	1081.65	42700.01
85	6.16	42700.01	219.19	1302.11	1082.92	41617.09
86	6.16	41617.09	213.63	1302.11	1088.48	40528.61
87	6.16	40528.61	208.05	1302.11	1094.06	39434.55
88	6.16	39434.55	202.43	1302.11	1099.68	38334.87
89	6.16	38334.87	196.79	1302.11	1105.32	37229.55
90	6.16	37229.55	191.11	1302.11	1111.00	36118.55
91	6.16	36118.55	185.41	1302.11	1116.70	35001.85
92	6.16	35001.85	179.68	1302.11	1122.43	33879.42
93	6.16	33879.42	173.91	1302.11	1128.20	32751.22
94	6.16	32751.22	168.12	1302.11	1133.99	31617.23
95	6.16	31617.23	162.30	1302.11	1139.81	30477.42
96	6.16	30477.42	156.45	1302.11	1145.66	29331.76
97	6.41	29331.76	156.68	1305.43	1148.75	28183.01
98	6.41	28183.01	150.54	1305.43	1154.89	27028.12
99	6.41	27028.12	144.38	1305.43	1161.05	25867.07
100	6.41	25867.07	138.17	1305.43	1167.26	24699.81
101	6.41	24699.81	131.94	1305.43	1173.49	23526.32
102	6.41	23526.32	125.67	1305.43	1179.76	22346.56
103	6.41	22346.56	119.37	1305.43	1186.06	21160.50
104	6.41	21160.50	113.03	1305.43	1192.40	19968.10
105	6.41	19968.10	106.66	1305.43	1198.77	18769.33
106	6.41	18769.33	100.26	1305.43	1205.17	17564.16
107	6.41	17564.16	93.82	1305.43	1211.61	16352.55
108	6.41	16352.55	87.35	1305.43	1218.08	15134.47
109	6.66	15134.47	84.00	1307.17	1223.17	13911.30
110	6.66	13911.30	77.21	1307.17	1229.96	12681.34
111	6.66	12681.34	70.38	1307.17	1236.79	11444.55
112	6.66	11444.55	63.52	1307.17	1243.65	10200.90
113	6.66	10200.90	56.61	1307.17	1250.56	8950.34
114	6.66	8950.34	49.67	1307.17	1257.50	7692.84
115	6.66	7692.84	42.70	1307.17	1264.47	6428.37
116	6.66	6428.37	35.68	1307.17	1271.49	5156.88
117	6.66	5156.88	28.62	1307.17	1278.55	3878.33
118	6.66	3878.33	21.52	1307.17	1285.65	2592.68
119	6.66	2592.68	14.39	1307.17	1292.78	1299.90
120	6.66	1299.90	7.21	1307.17	1299.96	-0.06



179. Solicítase un creto de 10000 euros nunha entidade bancaria, para devolver nun ano, con pagos mensuais. O creto obtense a xuro variable e actualizable aos 6 meses. Os réditos inicial (vixente para os 6 primeiros meses) é do 6% anual e para os últimos 6 meses o rédito é do 6.5% anual. Constrúe a táboa de amortizacións para ese creto.

Solución:

Nº p	%	Débeda	Xuros	Cota	Amortizado	Pendente	Cálculo da cota en cada variación do %
1	6.00	10000.00	50.00	860.66	810.66	9189.34	$i_1 = \frac{6}{1200} = 0.005 ; m_1 = 10000 \cdot \frac{(1+0.005)^{12} \cdot 0.005}{(1+0.005)^{12} - 1} \approx 860.66.$
2	6.00	9189.34	45.95	860.66	814.71	8374.63	
3	6.00	8374.63	41.87	860.66	818.79	7555.84	
4	6.00	7555.84	37.78	860.66	822.88	6732.96	
5	6.00	6732.96	33.66	860.66	827.00	5905.96	
6	6.00	5905.96	29.53	860.66	831.13	5074.83	
7	6.50	5074.83	27.49	861.91	834.42	4240.41	$i_2 = \frac{6.50}{1200} \approx 0.00542 ; m_2 = 5074.83 \cdot \frac{(1+0.00542)^6 \cdot 0.00542}{(1+0.00542)^6 - 1} \approx 861.91.$
8	6.50	4240.41	22.97	861.91	838.94	3401.47	
9	6.50	3401.47	18.42	861.91	843.49	2557.98	
10	6.50	2557.98	13.86	861.91	848.05	1709.93	
11	6.50	1709.93	9.26	861.91	852.65	857.28	
12	6.50	857.28	4.64	861.91	857.27	0.01	

6.4. Creación dun capital mediante pagos periódicos iguais (capitalización)

180. Un deportista de elite calcula que lle quedan catro anos de vida activa na profesión. Cando se retire quere montar un negocio; por iso decide aforrar cada ano 180000 €, que deposita nun banco ao comezo de cada un dos catro anos. Que capital terá ao retirarse, sabendo que o banco lle abona un 6% de xuro composto?

Solución:

Cada aportación anual produce xuros só no período que está imposto, da seguinte maneira:

Polo primeiro ingreso acumúlase $180000(1+0.06)^4 = 227245.85$ €.

Polo segundo ingreso acumúlase $180000(1+0.06)^3 = 214382.88$ €.

Polo terceiro ingreso acumúlase $180000(1+0.06)^2 = 202248.00$ €.

Polo cuarto ingreso acumúlase $180000(1+0.06)^1 = 190800.00$ €.

Ao remate dos catro anos obtense un capital final acumulado de:

$227245.85 + 214382.88 + 202248.00 + 190800.00 = 834676.73$ €.

Coa aplicación Financee a función financeira $tvmFV(N, I, PV, PMT, PPY, CPY, PMTAt)$, remarcando que os pagos se fan ao comezo do período.



Os valores dos parámetros son os que se ven na táboa da páxina 38.

181. Ao comezo de cada ano depositamos 6000 euros nun banco ao 7% anual. Canto diñeiro recolleremos ao finalizar o 10º ano?

Solución:

Polo primeiro ingreso acumulamos $6000 \cdot 1.07^{10}$. Polo segundo ingreso acumulamos $6000 \cdot 1.07^9$.

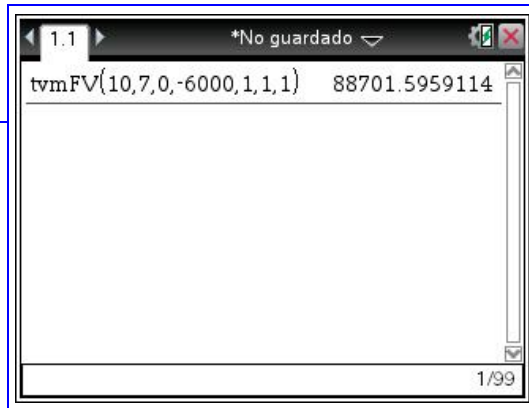
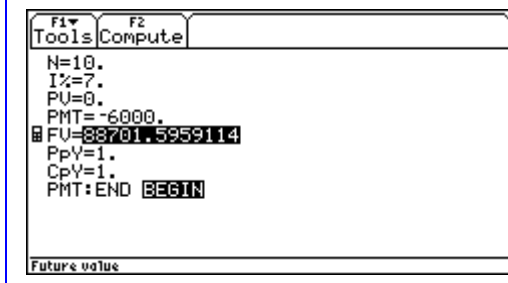
.....

Polo décimo ingreso acumulamos $6000 \cdot 1.07$.



En total teremos: $S_{10} = \frac{6000 \cdot 1.07^{11} - 6000 \cdot 1.07}{1.07 - 1} = 88701.5959 \approx 88701.60 \text{ €}.$

Coa aplicación Finance e a función financeira $\text{tvmFV}(N, I, PV, PMT, PpY, CpY, PMtAt)$, remarcando que os pagos se fan ao comezo do período.



Clasicamente chámanse *anualidades de capitalización* as cantidades iguais que se abonan ao comezo de ano a unha entidade financeira para formar, xunto cos xuros compostos, un determinado capital ao cabo dun certo número de anos.

182. Ao comezo de cada mes depositamos 100 € nun banco ao 6% anual. Canto recolleremos ao final do 2º ano?

Solución:

6% anual $\rightarrow \frac{6\%}{12} = 0.5\%$ mensual.

Polo primeiro ingreso acumulamos $100 \cdot 1.005^{24}$.

Polo segundo ingreso acumulamos $100 \cdot 1.005^{23}$.

.....

Polo vixésimo cuarto ingreso acumulamos $100 \cdot 1.005$.

En total teremos: $S_{24} = \frac{100 \cdot 1.005^{25} - 100 \cdot 1.005}{1.005 - 1} = 2555.91 \text{ €}.$

6.5. Fórmulas para as anualidades de capitalización

O problema que se nos plantea é:

Desexamos obter un capital C_F mediante o abono n anualidades de valor a impostas ao comezo do ano. Se o rédito é do $r\%$ anual, ¿como se obtén o valor de a coñecendo C , n e r ?

Para resolvelo chamamos $i = \frac{r}{100}$.

Calculemos o valor que van obtendo todas esas anualidades (impostas ao comezo do ano):

$$\left. \begin{array}{l} a \xrightarrow{\text{1ª anualidade está imposta } n \text{ anos}} a(1+i)^n \\ a \xrightarrow{\text{2ª anualidade está imposta } n-1 \text{ anos}} a(1+i)^{n-1} \\ \dots\dots\dots \\ a \xrightarrow{\text{en 1 ano}} a(1+i) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Cantidade total pagada} \\ \text{valorada ao final do ano } n\text{-ésimo.} \end{array}$$

Os valores das n anualidades forman unha progresión xeométrica, da que o primeiro termo é $a(1+i)$ e a razón é $1+i$. A suma da devandita progresión xeométrica é:

$$\begin{aligned} a(1+i) + \dots + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^n &= \frac{a(1+i)^{n+1} - a(1+i)}{(1+i) - 1} = \\ &= a(1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i} = C_F. \end{aligned}$$



- O valor futuro da imposición ao comezo de ano de n anualidades de importe a , cun rédito $r\%$ anual é:

$$C_F = a(1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \text{ con } i = \frac{r}{100}$$

- Se desexamos obter un capital C , mediante a imposición de n anualidades iguais, pagadas ao comezo de ano, cun rédito $r\%$ anual, a anualidade que deberemos impoñer é de:

$$a = \frac{C \cdot i}{(1+i)[(1+i)^n - 1]}$$

183. Unha persoa ten pensado deixar de traballar dentro de 10 anos, e calcula que necesitará nese momento dispoñer de 70000 €. Cal é a anualidade que debe ingresar ao comezo de cada ano, a un 6% anual para acumular ese capital?

Solución:

Da fórmula $a = \frac{C \cdot i}{(1+i)[(1+i)^n - 1]} = a = \frac{70000 \cdot 0.06}{(1+0.06)[(1+0.06)^{10} - 1]} \approx 5010.14818$

Solución: debe impoñer unha cota anual de 5010.15 €.

184. Sabendo que 11 kg de azucre custan o mesmo que 2 kg de café, calcula que cantidade de café se poderá mercar polo prezo dunha tonelada de azucre.

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 11 \text{ kg azúcar} \rightarrow 2 \text{ kg café} \\ 1000 \text{ kg azúcar} \rightarrow x \text{ kg café} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{2}{x} = \frac{11}{1000} \rightarrow x = \frac{1000 \cdot 2}{11} = 181.81 \text{ kg.}$$

Solución: poden mercarse 181.81 kg de café.

185. Un albanel, traballando oito horas diarias, tarda 4 días en tabicar a planta dun edificio. Cantas horas diarias terán que traballar dous albaneis para tabicar, en 8 días, o dobre da superficie anterior?

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ albanel} \rightarrow 8 \text{ h/d} \rightarrow 4 \text{ días} \rightarrow 1 \text{ tam} \\ 2 \text{ albaneis} \rightarrow x \text{ h/d} \rightarrow 8 \text{ días} \rightarrow 2 \text{ tam} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{8}{x} = \frac{2}{1} \cdot \frac{8}{4} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow x = 4 \text{ h/d.}$$

Solución: deberán traballar 4 horas diarias.

186. En 822 gramos de auga salgada hai 200 gramos de sal. Canta auga hai que engadir para que 300 gramos da nova mestura teñan só 50 gramos de sal?

Solución:

A concentración da nova mestura debe ser: $\frac{50}{300}$. Se x é a cantidade de auga que hai que engadir, tense:

$$\frac{200}{822+x} = \frac{50}{300} \rightarrow x = \frac{200 \cdot 300 - 50 \cdot 822}{50} = 378 \text{ gramos.}$$

Solución: hai que engadir 378 gramos de auga.

187. Se se recolleron nunha terra 21600 quilogramos de patacas e se observou que para cada 100 quilogramos de colleita se plantaran 18.79 kg de patacas, ¿cantos quilogramos se plantaron nese terreo?

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 100 \text{ kg} \rightarrow 18.79 \text{ kg} \\ 21600 \text{ kg} \rightarrow x \text{ kg} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{18.79}{x} = \frac{100}{21600} \rightarrow x = \frac{21600 \cdot 18.79}{100} = 4058.64 \text{ kg.}$$

Solución: plantáronse 4058.64 kg de patacas.

188. Un individuo recorre 33 Km en hora e media, dando 37500 pasos. Sendo os pasos de igual amplitude, ¿cantos pasos dará en dúas horas para recorrer 44 Km?

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 37500 \text{ pasos} \rightarrow 33 \text{ Km} \\ x \text{ pasos} \rightarrow 44 \text{ Km} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{37500}{x} = \frac{33}{44} \rightarrow x = \frac{44 \cdot 37500}{33} = 50000 \text{ pasos.}$$

Solución: dará 50000 pasos (hai que ter en conta que a velocidade non inflúe para nada).



189. Pagáronse 140 € polo transporte dunha mercancía de 3000 kg a unha distancia de 9 km. Canto se pagará polo transporte de 4500 kg a 36 km?

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} 140 \text{ €} \rightarrow 3000 \text{ kg} \rightarrow 9 \text{ km} \\ x \text{ €} \rightarrow 4500 \text{ kg} \rightarrow 36 \text{ km} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{140}{x} = \frac{3000}{4500} \cdot \frac{9}{36} \rightarrow x = \frac{140 \cdot 4500 \cdot 36}{3000 \cdot 9} = 840 \text{ €}.$$

Solución: pagaranse 840 €.

190. Que tanto por cento de rebaixa se concedeu no importe dunha factura de 28.50 €, se se pagaron 26.79 €?

Solución:

$$\text{A rebaixa foi de } 28.50 - 26.79 = 1.71 \text{ €}; \text{ en consecuencia, a porcentaxe pedida é do } \left. \begin{array}{l} 28.50 \rightarrow 1.71 \\ 100 \rightarrow x \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{100 \cdot 1.71}{28.50} = 6\%.$$

Solución: deuse unha rebaixa do 6%.

191. Dous alumnos dun instituto repártense un premio de 900 € en partes directamente proporcionais ao número de problemas resoltos correctamente (20 e 30, respectivamente) e inversamente proporcionais ao número de fallos de cálculo tidos (5 e 6, respectivamente). Calcula o importe das partes que debe recibir cada un.

Solución:

As partes a percibir deben ser directamente proporcionais a $\frac{20}{5} = 4$ e $\frac{30}{6} = 5$, respectivamente. $5 + 4 = 9$, e así tense:

$$\left\{ \begin{array}{l} 9 \rightarrow 900 \\ 4 \rightarrow x \end{array} \right. \rightarrow x = \frac{4 \cdot 900}{9} = 400 \text{ € recibe o primeiro};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 9 \rightarrow 900 \\ 5 \rightarrow y \end{array} \right. \rightarrow y = \frac{5 \cdot 900}{9} = 500 \text{ € recibe o segundo}.$$

Solución: o primeiro recibe 400 € e o segundo 500 €.

192. Sábese que para facer 100 kg de masa para pan necesítanse 40 kg de auga, 500 gramos de levadura, 750 gramos de sal e o resto de fariña. Na cocción a masa perde o 15% do peso. Cantos kg de fariña se necesitan para obter 500 kg de pan?

Solución:

Para os 100 kg de masa necesítanse $100 - (40 + 0.5 + 0.75) = 100 - 41.25 = 58.75$ kg de fariña. Como na cocción a masa perde

o 15% de peso, 100 kg de masa producen $100 - 100 \cdot \frac{15}{100} = 85$ kg de pan.

$$\left\{ \begin{array}{l} 85 \text{ kg de pan} \rightarrow 58.75 \text{ kg de fariña} \\ 500 \text{ kg de pan} \rightarrow x \text{ kg de fariña} \end{array} \right. \rightarrow x = \frac{500 \cdot 58.75}{85} = 345.5882 \dots \approx 345.59 \text{ kg de fariña}.$$

Solución: necesítanse uns 345.59 kg de fariña.

193. Nunha cafetería subiron o prezo do café nun 12%. Debido a iso, diminuíron as vendas nun 10%. Calcula a porcentaxe de aumento ou diminución da recadación.

Solución:

Sexa x o número de cafés que vende. Despois da suba vende $x - \frac{10x}{100} = 0.9x$ cafés. O incremento de prezo repórtalle

$$0.9x + 0.9x \cdot \frac{12}{100} = 1.008x = x + \frac{0.8x}{100} \equiv 0.8\% \text{ de incremento na recadación}.$$

Solución: obtivo un incremento do 0.8% na recadación.

194. A entrada dun cine custaba o ano pasado 3.30 € e este ano, 4.10 €. Cal foi o índice de variación? Cal é a porcentaxe de suba?

Solución:

$$194.1. \text{ Índice de variación: } \frac{4.10}{3.30} = 1.24.$$

$$194.2. \text{ Porcentaxe de suba: } 3.30 + \frac{3.30 \cdot x}{100} = 4.10 \rightarrow x = \frac{4.10 - 3.30}{3.30} \cdot 100 = 24.24\%.$$



195. Pescuda cá é o índice de variación do prezo dun televisor que custaba 450 €, despois de subilo un 15% e rebaxalo nun 25%. Cal é o prezo actual?

Solución:

$$\text{Índice de variación: } \left(1 + \frac{15}{100}\right) \left(1 - \frac{25}{100}\right) = 1.15 \cdot 0.75 = 0.8625.$$

$$\text{Prezo actual: } 450 \cdot 0.8625 = 388.125 \text{ €}.$$

Solución: o prezo actual é de 388.125 €.

196. O prezo dun ordenador baixou durante os últimos anos, pasando a custar 3750 € a 1560 €. Calcula o índice de variación e a diminución porcentual do prezo.

Solución:

$$\text{Índice de variación } \frac{1560}{3750} = 0.416. \text{ Variación porcentual: } 3750 + \frac{x \cdot 3750}{100} = 1560 \rightarrow x = \frac{1560 - 3750}{3750} \cdot 100 = -58.4\% \rightarrow$$

→ baixou o prezo un 58.4%.

197. Os concellos A e B desexan acondicionar unha área recreativa nun punto C. O importe das obras acordan repartilo en partes directamente proporcionais ao número de habitantes de cada poboación e inversamente proporcionais ás distancias de A e B á área C. Acha canto debe pagar cada poboación sabendo que o custo de acondicionar a área recreativa foi de 808000 euros; o concello A ten 4000 habitantes e dista da área recreativa 13 km; o concello B ten 5000 habitantes e a distancia á área recreativa é de 9 km.

Solución:

A cantidade total debe repartirse en partes directamente proporcionais a $\frac{4000}{13}$ e $\frac{5000}{9}$; $\frac{4000}{13} + \frac{5000}{9} = \frac{101000}{117}$;

$$\begin{cases} \frac{101000}{117} \rightarrow 808000 \\ \frac{4000}{13} \rightarrow x \end{cases} \rightarrow x = \frac{4000}{13} \cdot \frac{117 \cdot 808000}{101000} = 288000 \text{ € pagaré o concello A;}$$
$$\begin{cases} \frac{101000}{117} \rightarrow 808000 \\ \frac{5000}{9} \rightarrow y \end{cases} \rightarrow y = \frac{5000}{9} \cdot \frac{117 \cdot 808000}{101000} = 520000 \text{ € pagaré o concello B.}$$

Solución: o concello A pagaré 288000 € e o concello B aportará 520000 €.

198. Unha persoa perdeu nunha operación de bolsa os $\frac{4}{5}$ do seu capital. O resto rentoulle ao 3.5% nun fondo de inversión, co que obtivo 900 € de xuros ¿cal era o seu capital?

Solución:

O $\frac{1}{5}$ do capital —que é o que lle produce ese xuro— é

$$\begin{cases} 3.5\% \rightarrow 900 \\ 100\% \rightarrow x \end{cases} \rightarrow x = \frac{900 \cdot 100}{3.5} = 25714.2857 \text{ €} \approx 25714.29 \text{ €}.$$

$$\begin{cases} 1/5 \rightarrow 25714.29 \\ 1 \rightarrow y \end{cases} \rightarrow y = 5 \cdot 25714.29 = 128571.43 \text{ €}.$$

Solución: o capital era de 128571.43 €.

199. Un banco paga o 10% do diñeiro que se deposita nel, sempre que se manteña sen sacar nada durante un ano. Cantos xuros terás ao cabo dun ano se depositas 18500 €? E se o deixas durante 5 anos sen sacar nada?

Solución:

$$\text{Ao cabo dun ano, darannos } \frac{10 \cdot 18500}{100} = 1850 \text{ € de xuros.}$$

$$\text{Ao cabo dos cinco anos teremos: } 18500 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^5 = 18500 \cdot 1.1^5 = 29794.435, \text{ é dicir } 29794.435 - 18500 = 11294.435 \text{ € de xuros.}$$

Solución: ao cabo dun ano os beneficios por xuros son de 1850 € e en 5 anos son 11294.435 €.



200. Calcula en canto se transforman 5000 euros nun ano ao 10% se os períodos de capitalización son:

200.1. Semestres.

200.2. Trimestres.

200.3. Meses.

Indica, en cada caso, cal é a TAE correspondente.

Solución:

200.1. 10% anual = 5% semestral.

$$5000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^2 = 5000 \cdot 1.05^2 = 5000 \cdot 1.1025 = 5512.5 \text{ €} \rightarrow 5000 + \frac{5000x}{100} = 5512.5 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{5512.5 - 5000}{5000} \cdot 100 = 10.25 \rightarrow \text{TAE do } 10.25\%.$$

200.2. 10% anual = $\frac{10}{4} = 2.5\%$ trimestral.

$$5000 \cdot \left(1 + \frac{2.5}{100}\right)^4 = 5000 \cdot 1.025^4 = 5519.064 \text{ €} \rightarrow 5000 + \frac{x \cdot 5000}{100} = 5519.064 \rightarrow x = \frac{5519.064 - 5000}{5000} \cdot 100 = 10.38\% \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{TAE do } 10.38\%.$$

200.3. 10% anual = $\frac{10\%}{12} = \frac{5}{6}\%$ mensual.

$$5000 \cdot \left(1 + \frac{5/6}{100}\right)^{12} = 5000 \cdot 1.0083^{12} = 5000 \cdot 1.1047 = 5523.565 \rightarrow 5000 + \frac{5000x}{100} = 5523.565 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{5523.565 - 5000}{5000} \cdot 100 = 10.47\% \rightarrow \text{TAE do } 10.47\%.$$

201. En canto se transforma un capital de 3500 € depositados durante tres meses ao 8.5 % anual? E se se mantén 5 anos con períodos de capitalización trimestrais?

Solución:

$$8.5\% \rightarrow \frac{8.5}{4} = 2.125\% \text{ trimestral.}$$

$$\text{En tres meses (1 trimestre) transfórmase en: } 3500 \cdot \left(1 + \frac{2.125}{100}\right)^1 = 3500 \cdot 1.02125 = 3574.375 \text{ €}.$$

$$\text{En cinco anos (20 trimestres) transfórmase en: } 3500 \cdot \left(1 + \frac{2.125}{100}\right)^{20} = 3500 \cdot 1.52279 = 5329.7818 \text{ €}.$$

Solución: nun trimestre transfórmase en 3574.375 € e en cinco anos transfórmase en 5329.7818 €.

202. Recibiuse un préstamo de 8500 € ao 15%, que hai que devolver nun só pagamento. Cantos anos transcorreron se ao liquidalo se pagaron 14866.55 €?

Solución:

$$\text{Hai que resolver a ecuación } 8500 \cdot \left(1 + \frac{15}{100}\right)^n = 14866.55 \rightarrow 8500 \cdot 1.15^n = 14866.55 \rightarrow 1.15^n = \frac{14866.55}{8500} \rightarrow$$

$$\rightarrow 1.15^n = 1.74900588 \rightarrow n = \frac{\log(1.74900588)}{\log(1.15)} = 3.9999 \approx 4 \text{ anos.}$$

Solución: transcorreron uns 4 anos.

203. Un capital colocado ao 15% durante catro anos, converteuse en 5596.82 €. A canto ascendía ese capital?

Solución:

$$\text{Hai que resolver a ecuación } C \cdot \left(1 + \frac{15}{100}\right)^4 = 5596.82 \rightarrow C \cdot 1.15^4 = 5596.82 \rightarrow C \cdot 1.74900625 = 5596.82 \rightarrow$$

$$\rightarrow C = \frac{5596.82}{1.74900625} = 3200 \text{ €} \rightarrow \text{o capital invertido é de } 3200 \text{ €}.$$

Solución: inverteuse un capital de 3200 €.



204. Quérese amortizar un creto de 4500 € ao 12% anual en 6 prazos mensuais. En cada un dos prazos págase a sexta parte do capital prestado máis os xuros mensuais do capital pendente de pagamento. Calcula o importe de cada pagamento.

Solución:	Capital pendente	Pago de xuros	+	Pago de capital	=	Pago mensual	Débeda pendente
1º mes	4500	$4500 \cdot 0.01 = 45$	+	750	=	795	3750
2º mes	3750	$3750 \cdot 0.01 = 37.5$	+	750	=	787.5	3000
3º mes	3000	$3000 \cdot 0.01 = 30$	+	750	=	780	2250
4º mes	2250	$2250 \cdot 0.01 = 22.5$	+	750	=	772.5	1500
5º mes	1500	$1500 \cdot 0.01 = 15$	+	750	=	765	750
6º mes	750	$750 \cdot 0.01 = 7.5$	+	750	=	757.5	0

A primeira mensuralidade é de 795 €, a segunda de 787.5 €, a terceira de 780 €, a cuarta de 772.5, a quinta de 765 € e a sexta de 757.5 €.

205. Un artigo ten dous aumentos de prezo, un do 15% e despois un segundo aumento do 18%.

205.1. Se inicialmente custaba 82 €, canto vale agora?

205.2. Se agora costa 108.56 €, canto custaba antes dos aumentos?

Solución:

205.1. O incremento do 15% fai que o produto de 82 € pase a custar $82 \cdot 1.15 = 94.3$ €. Agora co segundo aumento do 18% pasa a custar $94.3 \cdot 1.18 = 111.274$ €.

205.2. Se x é o prezo inicial, os sucesivos aumentos transfórmano en $(1.15 \cdot 1.18) \cdot x = 1.357x \rightarrow 1.357x = 108.56 \rightarrow x = \frac{108.56}{1.357} = 80$ €.

206. Calcula o importe da anualidade coa que se amortiza un préstamo de 50000 € en 5 anos ao 15%. E se se paga en mensuralidades?

Solución:

Anualidade: $i = \frac{15}{100} = 0.15 \rightarrow a = 50000 \cdot \frac{1.15^5 \cdot 0.15}{1.15^5 - 1} = 14915.7776$ €.

Mensualidade: $i = \frac{15}{1200} = 0.0125 \rightarrow m = 50000 \cdot \frac{1.0125^{60} \cdot 0.0125}{1.0125^{60} - 1} = 1189.4965$ €.

Solución: a anualidade é de 14915.7776 € e o importe da mensuralidade é de 1189.4965 €.

207. Calcula a TAE para un rédito anual do 10% con pagamentos mensuais de xuros.

Solución:

10% anual $\rightarrow \frac{10}{12}$ % mensual $\rightarrow$ un capital C transfórmasse nun ano en $C \left(1 + \frac{10}{1200}\right)^{12}$, é dicir $C \cdot 1.104713 = C \left(1 + \frac{10.4713}{100}\right)$. Polo tanto, a TAE será do 10.4713%.

Solución: a TAE pedida é do 10.4713%.

208. Unha persoa paga un coche en sesenta mensuralidades de 333.67 €. Se o prezo do diñeiro está ao 12% anual, cal sería o prezo do coche se se pagase ao contado?

Solución:

Coñecemos m e hai que calcular C . Substitúense os datos na fórmula e despexase C .

O cálculo da mensuralidade faise a través da fórmula $m = C \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}$, onde $i = \frac{r}{1200}$. Necesítase despexar C :

$$C = \frac{m((1+i)^n - 1)}{(1+i)^n \cdot i} = \frac{333.67 \cdot (1.01^{60} - 1)}{1.01^{60} \cdot 0.01} = 15000.147 \approx 15000 \text{ €}.$$

Solución: o prezo ao contado sería duns 15000 €.



209. Un banco concede un préstamo ao 6%, que hai que amortizar en 7 anualidades de 14330.80 € cada unha. Canto diñeiro prestou o banco?

Solución:

Temos que despegar C na fórmula $a = C \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}$, onde $i = \frac{r}{100} \rightarrow C = a \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \rightarrow C = 14330.80 \cdot \frac{1.06^7 - 1}{1.06^7 \cdot 0.06} = 79999.99 \approx 80000 \text{ €}.$

Solución: o importe do préstamo é duns 80000 €.

210. Cómprase un electrodoméstico de 750 € e págase en 24 prazos mensuais cun interese do 13%. Cal será a cota mensual?

Solución:

A mensualidade calcúlase mediante a fórmula: $m = C \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}$, onde $i = \frac{r}{1200}$; neste caso $m = 750 \frac{\left(1 + \frac{13}{1200}\right)^{24} \cdot \frac{13}{1200}}{\left(1 + \frac{13}{1200}\right)^{24} - 1} =$

$= 35.6563 \approx 35.66 \text{ €}.$

Solución: a cota mensual será duns 35.66 €.

211. Demostra que se paga ao final de cada ano unha anualidade a , durante n anos ao $r\%$, a cantidade total que se paga é:

$$S = a \frac{(1+i)^n - 1}{i} \left(i = \frac{r}{100} \right)$$

Solución:

a en $n-1$ anos convértese en $a(1+i)^{n-1}$.

a en $n-2$ anos convértese en $a(1+i)^{n-2}$.

.....

a en 1 ano convértese en $a(1+i)$.

última anualidade $\rightarrow a$.

Polo tanto, temos que calcular a suma dos termos desa progresión.

$$S = a + a(1+i) + a(1+i)^2 + \dots + a(1+i)^{n-1} = a[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{n-1}] = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

212. Calcula o tanto por cento anual ao que se teñen que colocar 600 e para que en dous anos se convertan en 699.84 €.

Solución:

$$\text{Hai que resolver a ecuación } 600 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 = 699.84 \rightarrow \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 = \frac{699.84}{600} \rightarrow 1 + \frac{r}{100} = \sqrt{\frac{699.84}{600}} \rightarrow$$

$$\rightarrow r = \left(\sqrt{\frac{699.84}{600}} - 1 \right) \cdot 100 = 8\% \rightarrow r = 8\%.$$

Solución: colocáronse ao 8% anual.

213. Un libreiro comprou dous manuscritos antigos por 2250 € e despois vendeunos obtendo un beneficio do 40%. O primeiro manuscrito deixoulle un beneficio do 25% e o segundo un beneficio do 50%, canto pagou por cada manuscrito?

Solución:

Sexa x o que pagou polo primeiro e y o que pagou polo segundo. Temos as seguintes condicións:

$$\begin{cases} x + y = 2250 \\ 1.25 \cdot x + 1.5 \cdot y = 2250 \cdot 1.4 \end{cases} \rightarrow x = 2250 - y \rightarrow 1.25 \cdot (2250 - y) + 1.5y = 2250 \cdot 1.4 \rightarrow 2812.5 - 1.25y + 1.5y = 3150 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{337.5}{0.25} = 1350 \text{ €} \rightarrow x = 2250 - y = 2250 - 1350 = 900 \text{ €}.$$

Solución: o primeiro manuscrito custoulle 900 € e o segundo 1350 €.



214. No contrato de traballo dun empregado fíxase unha subida anual do 6.5% . Se empeza gañando 800 € ao mes, cantos anos teñen que pasar para que gañe 1500 € ao mes?

Solución:

Ao cabo de 1 ano gañará: $800 \cdot (1 + 0.065) = 800 \cdot 1.065$ €;

Ao cabo de 2 anos gañará: $800 \cdot (1 + 0.065)^2 = 800 \cdot 1.065^2$ €;

Ao cabo de 3 anos gañará: $800 \cdot (1 + 0.065)^3 = 800 \cdot 1.065^3$ €;

.....

Ao cabo de n anos gañará: $800 \cdot (1 + 0.065)^n = 800 \cdot 1.065^n$ €.

Trátase de buscar n para que $800 \cdot 1.065^n = 1500 \rightarrow 1.065^n = \frac{1500}{800} = 1.875 \rightarrow \log(1.065^n) = \log(1.875) \rightarrow$

$\rightarrow n \cdot \log(1.065) = \log(1.875) \rightarrow n = \frac{\log(1.875)}{\log(1.065)} = 9.981 \dots \approx 10$ anos.

Solución: tardará aproximadamente 10 anos en acadar ese salario mensual.

215. Solicítase un creto de 5000 euros nunha entidade bancaria, para devolver en seis meses, con pagos mensuais. O creto obtense a xuro variable e actualizable aos 3 meses. O rédito inicial (vixente para os 3 primeiros meses) é do 6% anual e para os últimos 3 meses o rédito é do 9% anual. Constrúe a táboa de amortizacións para ese creto.

Solución:

Nº p	%	Débeda	Xuros	Cota	Amorti- zado	Pen- dente	Cálculo da cota en cada variación do %
1	6.00	5000.00	25.00	847.98	822.98	4177.02	$i_1 = \frac{6}{1200} = 0.005$; $m_1 = 5000 \cdot \frac{(1 + 0.005)^6 \cdot 0.005}{(1 + 0.005)^6 - 1} \approx 847.98$.
2	6.00	4177.02	20.89	847.98	827.09	3349.93	
3	6.00	3349.93	16.75	847.98	831.23	2518.70	
4	9.00	2518.70	18.89	852.19	833.30	1685.40	$i_2 = \frac{9}{1200} \approx 0.0075$; $m_2 = 2518.70 \cdot \frac{(1 + 0.0075)^3 \cdot 0.0075}{(1 + 0.0075)^3 - 1} \approx 852.19$.
5	9.00	1685.40	12.64	852.19	839.55	845.85	
6	9.00	845.85	6.34	852.19	845.85	0.00	

**CUESTIÓN, EXERCICIOS E PROBLEMAS**

- 1.** Con 25 Kg de leite fábrícanse 2 Kg de manteiga. Cantos litros de leite fan falta para fabricar 50 Kg. de manteiga? A densidade do leite é 1.03.
- 2.** Unha academia cobrou 38500 € polo ensino de 22 alumnos durante 7 meses. Canto deberán pagar 14 alumnos que quedaron durante os 5 meses restantes do ano?
- 3.** A dúas persoas custáballes a mesma cantidade diaria o alumeado dos seus domicilios. Nunha delas acendéronse 18 lámpadas durante 4 horas ao día, e consumía cada lámpada 100 vatios por hora. Cantas lámpadas aluman o outro domicilio, estando acendidas 3 horas ao día e consumindo cada unha 120 vatios por hora?
- 4.** Sabendo que por unha billa flúe auga a razón de 6 m^3 cada 8 horas, calcular o volume de auga que fluirá nun día.
- 5.** Con obxecto de determinar o tempo que tardará un manancial en encher un pozo de 640 m^3 , mídese o caudal do manancial, observando que tarda 7.2 segundos en encher un recipiente de 1.5 litros. En canto tempo se encherá o pozo?
- 6.** É a lonxitude da circunferencia directamente proporcional ao radio? Razoa a resposta
- 7.** Un camión, circulando a unha velocidade media de 60 km/h, tarda 7 horas e 30 minutos en recorrer unha certa distancia. Calcula a velocidade media que ten que levar un automóbil para realizar o mesmo recorrido nun tempo de 5 horas.
- 8.** Por 20 días de traballo, a razón de oito horas diarias, un traballador percibe a cantidade de 1800 €. Canto percibirá por 5 días, a razón de seis horas diarias?
- 9.** Seis obreiros traballando a razón de oito horas diarias durante 25 días, cobraron 7560 € por unha reparación. Calcula canto cobrarán, por outra reparación similar, dez obreiros, traballando a razón de dez horas diarias durante 5 días.
- 10.** Un centro de ensino ten fondos para atender a 800 alumnos durante 3 meses, considerando que o custo global por alumno é de 25 € diarios. A canto debe reducirse o gasto por alumno se se matriculan 300 alumnos máis e se quere que os fondos duren para 4 meses?
- 11.** Un comerciante mercou 2500 Kg de café verde por 12500 €. Tostalo cóstalle 0.25 € por Kg. Tendo en conta que ao tostar o café perde o quinto do seu peso, ¿a que prezo por quilogramo deberá vendelo para ganar o 30%? Non se consideran para nada os impostos.
- 12.** En 6 días de traballo 12 obreiros fixeron 120 m dunha obra determinada. Cantos metros farán 14 obreiros, traballando 9 días?
- 13.** Un obreiro traballando 9 horas diarias, recibe 1000 € por 8 xornais, incluídos impostos. Canto recibirá por 18 días de traballo, empregando 8 horas cada día?
- 14.** Necesítanse 275 kg de combustible para alimentar tres motores durante dez días. Cantos motores se alimentarán con 2475 kg de combustible durante 30 días?
- 15.** Un obreiro traballando durante 20 días e 8 horas diarias, recibe 1803.04€. Cantas horas diarias traballou para concluír unha obra empregando 30 días e recibindo 2804.55€
- 16.** Un home andando recorre 120 km usando 8 horas diarias durante 5 días. Cantas horas diarias debe andar se quere recorrer 192 km en 12 días de marcha?
- 17.** O transporte de 4 contedores de mercancías, que pesan cada un 110 kg, custou 600 €. Pagáronse 1100 € para transportar outros 10 contedores á mesma distancia. Cal é o peso de cada un destes contedores?
- 18.** Un comerciante vendeu, con ganancia do 6% , 75 toneladas de froita que lle custaran 366.62 € cada unha. Que beneficio realizou?
- 19.** Dun colectivo de 12029 persoas, 6255 son mulleres. Que tanto por cento do colectivo son mulleres?
- 20.** Na fabricación de pólvora entra o 75% de sal nítrica, o 12.5% de carbón e a mesma cantidade de xofre. Hai un qm de sal nítrica.
 - 20.1. Canto carbón e xofre hai que poñer para obter pólvora?
 - 20.2. Que cantidade de pólvora se obterá?
- 21.** Un comerciante vende 129 pares de zapatos por 16125 €, obtendo un beneficio total de 1612.50€. Cal é o % de marxe con que recarga cada par de zapatos?



- 22.** Nuns grandes almacéns un pantalón custa 125 €. No período de rebaixas, ese pantalón custa 95 euros. Calcula a porcentaxe de desconto.
- 23.** Un equipo de traballo de 5 persoas gastou nun restaurante 6000 € en 8 días. De cantas persoas se compoñía outro equipo de traballo que gastou 42000 euros en 40 días?
- 24.** Nunha discoteca teñen un recipiente de 80 litros e enchérono con 65 litros de alcohol e o resto de auga. Vendo que é unha mestura “moi forte” sacaron 10 litros da mestura e replazárona por auga. Cal será a relación entre os volumes de alcohol e auga na nova mestura que resulta despois desa operación?
- 25.** Nun centro escolar, por cada 5 alumnos que aproban todas as materias hai 4 que suspenden algunha. Que fracción e que porcentaxe do total supón cada un dos dous tipos?
- 26.** Depositamos un certo diñeiro ao comezo dun ano, nun banco, ao 6% anual. Cada mes esa cantidade aumenta en progresión xeométrica. Cal é a razón?
- 27.** Unha empresa reparte 4290 € de beneficios entre os tres traballadores que conforma un grupo de traballo. O encargado cobra 2400 € mensuais, o técnico percibe 1800 €, e o axudante cobra 1200 € ao mes.
- 27.1. Se acordan repartilas en partes inversamente proporcionais aos seus salarios, canto recibiu cada un?
- 27.2. De facer o reparto de xeito directamente proporcional ao salario —o habitual—, ¿canto recibiría cada un traballadores?
- 28.** Divide o número 861 en partes inversamente proporcionais a 30, 40 e 18.
- 29.** Unha suma componse de dúas partes, que son entre si como os números 6 e 30, sendo o menor deles 1200. Canto vale o maior?
- 30.** Un técnico especialista comprométese a facer un traballo pola cantidade de 2109 €. Necesita que un enxeñeiro lle dirixa o traballo, polo que lle ofrece as $\frac{3}{5}$ partes da suma. Para que lle dera tempo a facer o traballo, compromete a un técnico auxiliar que lle axude a facer o traballo, ao que lle ofrece as $\frac{2}{5}$ partes da súa parte, quedándose el co resto. Que cantidade recibiu cada un?
- 31.** Ao vender unha libreta en 4.26 € gañouse o 12%. Cal foi o prezo ao que se mercara?
- 32.** As obras de limpeza dun río importaron 36600 €, e afectaron a tres concellos A, B e C, en lonxitudes de 4, 5 e 7 km, respectivamente. O custo por quilómetro da limpeza no concello A resultou as $\frac{3}{4}$ do de B, e os do concello C resultaron os $\frac{4}{5}$ do de A. Os concellos contribúen co 75% da obra e a Unión Europea co resto. Canto aportou cada concello?
- 33.** Hai 10 anos un chicle custaba 2 PTA e hoxe custa 5 céntimos de euro ($1\text{€} \approx 166.386\text{ PTA}$). Cal é o índice de variación? Calcula o aumento porcentual.
- 34.** Se o prezo do aluguer dun apartamento sobe un 10% cada ano, cantos anos tardaría en duplicarse?
- 35.** Calcula en canto se transforma un capital de 10000 euros ao 5% anual durante 2 anos e 3 meses se o período de capitalización é:
- 35.1. Anual.
- 35.2. Mensual.
- 36.** Un comerciante pide un préstamo de 5000 euros para devolver nun só pagamento aos tres meses. A canto debe ascender ese pagamento se o prezo do diñeiro está ao 12% anual?
- 37.** Pídese un préstamo de 4000 € ao 6.5% de interese semestral co compromiso de devolvelo, nun só pagamento, ao cabo de dous anos. A canto ascenderá ese pagamento?
- 38.** Un banco paga o 2% trimestral. Cantos anos teñen que estar depositados 2000 euros para converterse en 2536.48€?
- 39.** Quérese amortizar un creto de 50000 € en 5 anos, cun interese do 15% de xeito que cada ano se paguen os xuros do capital pendente máis a quinta parte do capital total. Calcula o que hai que pagar cada ano.
- 40.** Un aforrador mete todos os anos na mesma data 1500 € nunha conta que lle produce o 6% anual. Que cantidade acumulará ao cabo de 3 anos?
- 41.** Recibiuse un préstamo dunha financeira polo que hai que pagar 10 anualidades de 1413.19€. Cal é a cantidade prestada se o rédito é o 10.5%?



- 42.** Comproba que se pagamos ao final de cada ano unha anualidade de 2500 e durante 8 anos, ao 5%, pagamos en total 23872.77 €.
- 43.** Un traballador aforra 5000 € anuais que ingresa no banco *ao comezo* de cada ano. Se o banco lle dá un 9.5% de interese, que cantidade terá ao cabo de 10 anos?
- 44.** Ingrésase nun banco 3500 € *ao principio* de cada ano ao 8% durante 5 anos. Canto capital haberá ao final do 5º ano?
- 45.** Solicítase un creto de 10000 euros nunha entidade bancaria, para devolver nun ano, con pagos mensuais. O creto obtense a xuro variable e actualizable aos 6 meses. Os réditos inicial (vixente para os 6 primeiros meses) é do 6% anual e para os últimos 6 meses o rédito é do 6.5% anual. Constrúe a táboa de amortizacións para ese creto.
- 46.** Unha persoa inicia un plan de pensións aos 45 anos, con cotas mensuais de 200 € ao 9% anual, con períodos de capitalización mensuais. De que capital dispoñerá aos 65 anos?
- 47.** Ordénanse 31 selos de esquerda a dereita en orde crecente de prezos. O prezo de cada selo difire en 2 € dos seus dous adxacentes. Polo prezo do último selo poderíamos comprar o selo central e un dos que ten ao lado. Cal deles?