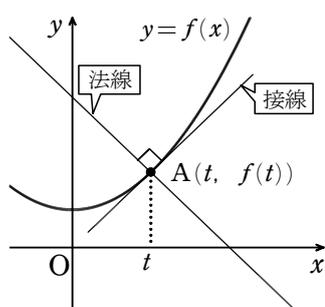


## 8 : 接線, 法線の方程式

曲線上の点 A を通り, A におけるこの曲線の接線と垂直な直線を点 A におけるこの曲線の「法線 (normal line)」という。関数  $y = f(x)$  が  $x = t$  で微分可能であるとき, 微分係数  $f'(t)$  は曲線  $y = f(x)$  上の点  $(t, f(t))$  における接線の傾きに等しい。したがって, 次が成り立つ。

☆



曲線  $y = f(x)$  上の点  $(t, f(t))$  における

(1) 接線の方程式は

$$y = f'(t)(x - t) + f(t)$$

(2) 法線の方程式は

$$y = -\frac{1}{f'(t)}(x - t) + f(t) \quad (f'(t) \neq 0)$$

例 1) 曲線  $y = \sqrt{x+1}$  上の点  $(0, 1)$  における接線の方程式と法線の方程式は…

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \text{ より } x=0 \text{ のとき } y' = \frac{1}{2} \quad \therefore \text{接線は } y = \frac{1}{2}x + 1, \text{ 法線は } y = -2x + 1$$

例 2) 曲線  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$  上の点  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$  における接線の方程式と法線の方程式は…

$$\text{両辺 } x \text{ で微分して, } \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{y'}{2\sqrt{y}} = 0 \quad x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{4} \text{ を代入すると, } y' = -1$$

$$\therefore \text{接線は } y = -\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \text{ つまり } y = -x + \frac{1}{2} \quad \text{法線は } y = \left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \text{ つまり } y = x$$

注) 導関数の利用を前提として接線を求める場合, 原則「接線は接点が決める!」

問 1 : 曲線  $y = e^x$  について, 点  $(1, 0)$  を通る接線の方程式を求めなさい。

解) 接点を  $P(t, e^t)$  とすると,  $y' = e^x$  より, 点 P における接線の方程式は

$$y = e^t(x - t) + e^t \dots (*)$$

である。点  $(1, 0)$  を通るので,  $0 = e^t(1 - t) + e^t \Leftrightarrow e^t(2 - t) = 0 \quad \therefore t = 2$

(\*) より, 求める接線の方程式は,  $y = e^2(x - 2) + e^2$  つまり  $y = e^2x - e^2$

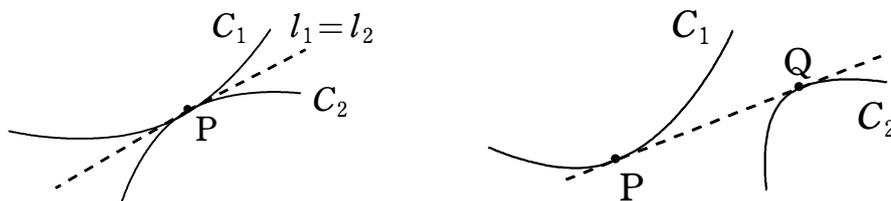
Ex1 : 次の問いに答えなさい。

(1)  $x = \sin t, y = \cos 2t$  で表される曲線において,  $t = \frac{\pi}{4}$  における接線と法線の方程式を求めなさい。

(2) 曲線  $y = \sqrt{x^2 + 1}$  について, 点  $(1, 0)$  から引いた接線と法線の方程式を求めなさい。

$$\left( \text{答 : (1) } y = -2\sqrt{2}x + 2, y = \frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{1}{4} \quad (2) y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}, y = -\sqrt{5}x + \sqrt{5} \right)$$

2 曲線  $C_1, C_2$  が接するとは、2 曲線  $C_1, C_2$  が共有点を持ち、いずれかの共有点において、 $C_1, C_2$  のそれぞれの接線  $l_1, l_2$  が一致することである。このように 2 つの曲線に同時に接する直線を 2 曲線の「共通接線」という。2 つの曲線が接していなくても共通接線は存在する。

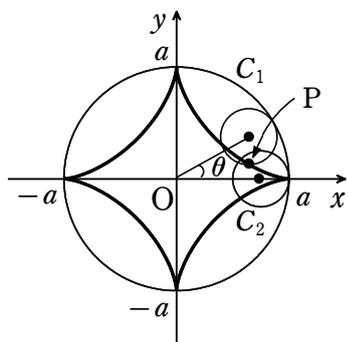


Ex2 : 次の問いに答えなさい。

- (1) 関数  $f(x) = \log x, g(x) = ax^2$  に対し、 $y = f(x)$  と  $y = g(x)$  のグラフが共有点を持ち、この点において共通の接線をもつとき、定数  $a$  の値および接線の方程式を求めなさい。
- (2) 2 曲線  $y = e^x, y = \log x + 2$  の共通接線の方程式を求めなさい。

(答 : (1)  $a = \frac{1}{2e}, y = \frac{1}{\sqrt{e}}x - \frac{1}{2}$  (2)  $y = x + 1, y = ex$ )

Ex3 : 円の中を半径が  $1/4$  倍の円が滑らずに転がるときに内側の円上の 1 点がえがく曲線を「アステロイド (asteroid)」(星芒形) とよぶ。大きな円が原点中心半径  $a$  のとき、アステロイドは  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  (パラメータ表示は  $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ ) で表せる。



曲線がパラメータ  $t$  を用いて、 $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$  ( $0 < t < \frac{\pi}{2}$ ) で表されるとき、この曲線  $C$  上の任意の点  $P$  における接線と  $x$  軸、 $y$  軸との交点をそれぞれ  $Q, R$  とする。このとき、線分  $QR$  の長さを求めなさい。

(答 : 1)

Challenge : Ex3 から得られた結果の意味を考察し、次の問題に答えなさい。

座標平面上に定点  $C(a, b)$  ( $a, b$  は正の実数) と 2 つの動点  $A, B$  がある。線分  $AB$  の長さをつねに  $l$  ( $l > 0$ ) に保ちながら、 $A$  は原点  $O(0, 0)$  から点  $(0, l)$  まで  $y$  軸上を動き、 $B$  は点  $(l, 0)$  から原点  $O$  まで  $x$  軸上を動くものとする。線分  $AB$  が線分  $OC$  とつねに共有点を持ちながら動けるための  $l$  の条件を求めよ。ただし、線分は両端を含むものとする。

(千葉大学)

(答 :  $l^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$ )